Diplomarbeit

Minimale Hyperflächenimmersionen in sphärischen Räumen mit konstanter Norm der Weingartenabbildung

Thilo Mahnig

Bonn, im Oktober 1995

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **2**

1 Einführende Formeln **4**

1.1 Differentiations- und Vertauschungsregeln 4

1.2 Dritte Ableitungen 6

1.3 Wichtige Identitäten 9

2 Allgemeine Hyperflächengleichungen **13**

2.1 Der Laplace von $\|\mathbf{D}\boldsymbol{A}\|^2$ 16

3 Die isoparametrischen Hyperflächen nach Münzner **20**

4 Konstantes S **26**

4.1 Die Ableitung der Determinante 30

4.2 Eine explizite Schranke 34

5 Der dreidimensionale Fall **35**

6 Variables S **41**

7 Die Ansätze von Yang und Cheng **45**

7.1 Beweis des Satzes 50

8 Der Satz von Yang und Cheng **54**

8.1 Hilfsrechnungen 54

8.2 Eine Abschätzung für U 56

8.3 Beweis des Satzes von Yang und Cheng 62

Fazit **68**

Literaturverzeichnis **70**

Einleitung

Die folgende Arbeit befaßt sich mit geschlossenen, in die Einheitssphäre immersierten n-dimensionalen minimalen Hyperflächen, M. Dieses Teilgebiet der Hyperflächentheorie ist recht unübersichtlich, da zunächst keine weiteren Voraussetzungen vereinbart wurden. Durch diesen Mangel an Bedingungen ist auch der Vorrat an Identitäten, die die Differentialgeometrie liefert, stark begrenzt: Außer der Gauß- und der Codazzigleichung stehen keine weiteren Beziehungen zur Verfügung.

Nun taucht in beiden Formeln die *Weingartenabbildung* A. Die einzige, aber wesentliche Zusatzvoraussetzung der *Minimalität* von M besagt außerdem, daß die Spur von A überall verschwindet. Es ist also natürlich, die Weingartenabbildung als Ansatz für das Studium dieser Flächen zu nehmen.

Dabei stellt sich heraus, daß das Quadrat der Norm der Weingartenabbildung (S) eine interessante Größe ist. Auf der Ebene der Eigenwerte λ_i von A ist es einfach die Summe der Quadrate der λ_i, außerdem hängt S nur von der Dimension und der Spur der Riccikrümmung ab: S ist also eine intrinsische Größe.

In einer Arbeit von 1967 zeigt J. Simons [12] durch Ausrechnen des Laplace der Weingartenabbildung einen ersten Starrheitssatz: Liegt S zwischen 0 und n (der Dimension der Hyperfläche), so muß $S = 0$ oder $S = n$ gelten. Diese Technik wurde z.B. in den Arbeiten von Nomizu/Smyth [9] und Chern [2] benutzt.

1984 hat Walter in [14] eine Verallgemeinerung der Technik veröffentlicht, indem er symmetrische Funktionen der Eigenwerte höherer Ordnung betrachtet und von ihnen den Laplace bildet. Dies führt er auf eine viel ältere Arbeit von Weyl [16] zurück.

Falls $S = 0$, so muß die Minimalfläche eine äquatoriale Sphäre sein. Lawson [7] und Chern,do Carmo und Kobayashi [3] haben unabhängig voneinander gezeigt, daß die Fläche im Falle $S = n$ ein Cliffordtorus sein muß, also ein Produkt von zwei Sphären oder die Veronesefläche. Chern hat damals die Frage aufgeworfen, ob die Werte von S diskret seien. Da Beispiele für Flächen mit $S = 2n$ bekannt sind (die isoparametrischen Flächen von Cartan [1] und Münzner [8] liefern Flächen mit $S = 0, n, 2n, 3n$ oder $5n$), Beispiele für Flächen mit dazwischenliegenden Werten von S aber nicht, so liegt die Vermutung nahe, daß S nicht zwischen n und $2n$ liegen kann.

1983 gelang es Peng und Terng [10, 11], zu beweisen, daß Werte nahe n nicht möglich sind. Dabei gaben sie auch eine expliziten Lücke an, die allerdings von dem erhofften Wert noch recht weit entfernt war. Die eine Arbeit macht dabei keine weiteren Voraussetzungen für S, dafür erhält man ein Resultat nur für bis zu fünfdimensionale Flächen. Die andere Arbeit

hingegen setzt konstantes S (bzw. konstante Spur der Riccikrümmung) voraus, dann existiert eine Grenze in jeder Dimension.

Diese Ergebnisse erzielten die Autoren dadurch, daß sie die vorhandenen Identitäten eine Stufe weiter differenzierten, bis zur dritten Ableitung der Weingartenabbildung. Die vielfachen Symmetrien dieser Abbildung verhindern dabei, daß die entstehenden Terme übermäßig kompliziert werden.

Erst 1994 wurde dieses Resultat von Yang und Cheng [17] verbessert. Die Autoren benutzten hierzu die Arbeiten von Peng und Terng. Ansonsten schafften sie es, einige Terme abzuschätzen, die beim Ableiten der Summe der dritten beziehungsweise vierten Potenzen der Eigenwerte entstehen, und bewiesen eine Identität zwischen diesen Ausdrücken.

Leider sind die Quellen alle in einer unübersichtlichen Indexnotation verfaßt, die den Blick auf die geometrische Bedeutung der Objekte verstellt. Die vorliegende Arbeit will versuchen, diesen Mangel zu beheben, indem die Technik des Differenzierens der Weingartenabbildung und das Analysieren des Laplace von bekannten Größen in eine der Thematik besser angepaßte Schreibweise gebracht wird.

Dabei werden sowohl einige der älteren Resultate wie auch die Texte [10, 11, 17] aufgegriffen und in dieser Notation vorgestellt. Zentraler Ansatzpunk ist dabei die Beschreibung *auf der Ebene der Endomorphismen*. So können die meisten Größen durch das Skalarprodukt zwischen Endormorphismen ausgedrückt werden. Dadurch erweisen sich Ausdrücke wie $\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$ als Norm der Ableitung von A zum Quadrat.

Zunächst entwickle ich Formeln rund um dieses Skalarprodukt sowie Vertauschungsregeln für zweite und dritte Ableitungen von Vektorfeldern und Endomorphismen. In Kapitel 2 werden die Auswirkungen dieser Gleichungen für den Fall der minimalen Hyperflächenimmersion in die S^{n+1} untersucht.

Das nächste Kapitel widmet sich den isoparametrischen Beispielen und bestimmt darunter jene, die für diese Arbeit relevant sind.

Danach folgen drei Kapitel, die die Ergebnisse von Peng und Terng in der neuen Notation darstellen.

Schließlich werde ich auch noch die neuesten Ergebnisse von Yang und Cheng darstellen. Grundlage für das letzte Kapitel ist ein Manuskript zu einem Vortrag, den Professor Cheng anläßlich seines Aufenthalts in Bonn im Winter 1994/1995 hielt. In den Rechnungen taucht allerdings am Ende eine Abschätzung auf, die ich nicht nachvollziehen konnte. Das Ergebnis kann aber, wie in dieser Arbeit gezeigt, auch ohne diese Abschätzung bewiesen werden.

Abschließend möchte ich noch Professor Karcher für die Anregung zu diesem interessanten Thema danken sowie für einige hilfreiche Gespräche.

Kapitel 1

Einführende Formeln

1.1 Differentiations- und Vertauschungsregeln

M sei eine n-dimensionale, in die $S^{n+1}(1)$ immersierte Minimalfläche. Die Weingartenabbildung heiße A. A besitzt als symmetrische Abbildung in jedem Punkt eine Diagonaldarstellung. Da die Eigenwerte von A im Folgenden eine große Rolle spielen, ist es natürlich interessant, eine Basis zu wählen, welche A diagonalisiert. Dies ist global aber nicht möglich. Daher wählt man eine Orthonormalbasis e_i, die an einem gewählten Punkt p A diagonalisiert und setzt sie parallel fort. Natürlich hat man dann keine global parallelen Basen geschaffen, sondern nur solche, die an *einem* Punkt parallel sind.

Dieser Punkt p wird nicht immer derselbe sein, die Wahl wird aber aus dem Kontext immer hervorgehen. Durch die Wahl von an einem Punkt parallelen Basen vereinfachen sich viele der Gleichungen enorm, da alle Terme verschwinden, in denen einfache Ableitungen der Basiselemente vorkommen. *Solche Gleichungen lassen sich allerdings nicht weiter differenzieren!*

$\langle X, Y\rangle$ sei die Riemannsche Metrik, $\mathrm{D}_X Y$ die kovariante Ableitung des Vektorfeldes Y in Richtung des Vektorfeldes X.

B, C seien Endomorphismen; V, W, X, Y, Z seien Vektorfelder. A sei, wie bereits erwähnt, die Weingartenabbildung. Sie genügt der Codazzigleichung: $\langle \mathrm{D}_X A\cdot Y, Z\rangle = \langle \mathrm{D}_Y A\cdot X, Z\rangle = \langle \mathrm{D}_Z A\cdot Y, X\rangle$.

$(e_i)_i$ sei stets Orthonormalbasis, also gilt für jeden Punkt q: $\langle e_i(q), e_j(q)\rangle_q = \delta_{ij}$. Den Punkt q, an dem die Formel betrachtet wird, gebe ich allerdings wie schon oben *nicht* mehr an. Summationen gehen stets von 1 bis n. Summenzeichen beziehen sich immer nur auf das folgende Produkt, ansonsten klammere ich entsprechend, also gilt z.B. $\sum_i a_i + b = b + \sum_i a_i$. Integrale erstrecken sich hingegen immer über den Rest der Gleichung.

Zentral für die Darstellung ist folgende

Definition 1.1

$$\langle B, C\rangle := \mathrm{spur}(B^{tr}C) = \sum_i \langle Be_i, Ce_i\rangle$$

definiert ein Skalarprodukt für Endomorphismen.

Diese Definition ist von der Wahl der Orthonormalbasis bekanntlich unabhängig. Seien λ_i die Eigenwerte von A, dann gilt, weil M Minimalfläche ist:

$$0 = \langle A, \mathrm{id}\rangle = \sum_i \langle Ae_i, e_i\rangle = \sum_i \lambda_i \tag{1.1}$$

Dann gilt auch:

$$S := \langle A, A\rangle = \|A\|^2 = \sum_i \lambda_i^2 \geq 0 \tag{1.2}$$

Mit Endomorphismen läßt sich genauso leicht rechnen wie mit Vektorfeldern. So existiert eine kovariante Ableitung:

$$(\mathrm{D}_X A)\cdot Y := \mathrm{D}_X(A\cdot Y) - A\cdot \mathrm{D}_X Y. \tag{1.3}$$

Auch ist das obige Skalarprodukt mit dieser Differentiation verträglich, wie man das aus der Differentialgeometrie her kennt:

Satz 1.1 *Für die Ableitung des Skalarproduktes gilt:*

$$\partial_X\langle B, C\rangle = \langle \mathrm{D}_X B, C\rangle + \langle B, \mathrm{D}_X C\rangle.$$

Beweis: Verwende bei p parallele Basen für die Darstellung des Skalarproduktes:

$$\begin{aligned}\partial_X\langle B, C\rangle &= \partial_X \sum_i \langle Be_i, Ce_i\rangle \\ &= \sum_i \Big(\langle \mathrm{D}_X B\cdot e_i + B\cdot \underbrace{\mathrm{D}_X e_i}_{=0}, Ce_i\rangle + \langle Be_i, \mathrm{D}_X C\cdot e_i + C\cdot \underbrace{\mathrm{D}_X e_i}_{=0}\rangle\Big) \\ &= \langle \mathrm{D}_X B, C\rangle + \langle B, \mathrm{D}_X C\rangle\end{aligned}$$

■

Da der erste und der letzte Term unabhängig von der Wahl der Basen in den mittleren Ausdrücken sind, gilt diese Gleichung nun für jede Darstellung.

Die Ableitung von $\mathrm{D}B$ ist so definiert:

$$\mathrm{D}^2_{X,Y} B := \mathrm{D}_X(\mathrm{D}_Y B) - \mathrm{D}_{\mathrm{D}_X Y} B \tag{1.4}$$

Sie ist tensoriell in X und Y und analog zur 2. Ableitung von Vektorfeldern definiert:

$$\mathrm{D}^2_{X,Y} Z := \mathrm{D}_X(\mathrm{D}_Y Z) - \mathrm{D}_{\mathrm{D}_X Y} Z$$

Für in p parallele X, Y, Z folgt dann mit $(\mathrm{D}^2_{X,Y} - \mathrm{D}^2_{Y,X})Z =: \mathrm{R}(X,Y)Z$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_Y(B\cdot Z) &= (\mathrm{D}_Y B)\cdot Z + B\cdot \mathrm{D}_Y Z \\ \Rightarrow \qquad \mathrm{D}^2_{X,Y}(B\cdot Z) &= (\mathrm{D}^2_{X,Y} B)\cdot Z + B\cdot \mathrm{D}^2_{X,Y} Z \end{aligned}$$

(da alle einfachen Ableitungen verschwinden)

$$\Rightarrow \quad \left[(\mathrm{D}^2_{X,Y} - \mathrm{D}^2_{Y,X})B\right] Z = \mathrm{R}(X,Y)(B\cdot Z) - B\cdot \mathrm{R}(X,Y)Z$$

bzw.

Satz 1.2 *Die Vertauschung der zweiten Ableitung von Endomorphismen erfüllt*

$$(\mathrm{D}^2_{X,Y} - \mathrm{D}^2_{Y,X})B = \mathrm{R}(X,Y)B - B\cdot \mathrm{R}(X,Y).$$

Da dies tensoriell ist, gilt es auch für nicht-parallele Vektorfelder. Speziell für symmetrische Endomorphismen wie A gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[(\mathrm{D}^2_{X,Y} - \mathrm{D}^2_{Y,X})A\right] V, W\right\rangle &= \langle \mathrm{R}(X,Y)AV, W\rangle - \langle \mathrm{R}(X,Y)V, AW\rangle \\ &= \langle \mathrm{R}(X,Y)AV, W\rangle + \langle \mathrm{R}(X,Y)AW, V\rangle \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2 Dritte Ableitungen

Ich benötige noch 3. Ableitungen von Vektorfeldern und der Weingartenabbildung. Als tensorielle Ableitung von $\mathrm{D}^2_{Y,Z}$ definiert man:

Definition 1.2

$$\mathrm{D}^3_{X,Y,Z} W := \mathrm{D}_X(\mathrm{D}^2_{Y,Z} W) - \mathrm{D}^2_{\mathrm{D}_X Y,Z} W - \mathrm{D}^2_{Y,\mathrm{D}_X Z} W.$$

Man kann leicht zeigen, daß dieser Ausdruck tensoriell in X, Y, Z ist. f sei eine Funktion. Weil schon $\mathrm{D}^2_{X,Y}$ tensoriell ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^3_{X,Y,fZ} W &= \mathrm{D}_X(f\cdot \mathrm{D}^2_{Y,Z} W) - f\cdot \mathrm{D}^2_{\mathrm{D}_X Y,Z} W - \mathrm{D}^2_{Y,(\partial_X f)Z} W - \mathrm{D}^2_{Y,f\mathrm{D}_X Z} W \\ &= (\partial_X f)\cdot \mathrm{D}^2_{Y,Z} W + f\cdot \mathrm{D}_X(\mathrm{D}^2_{Y,Z} W) - f\cdot \mathrm{D}^2_{\mathrm{D}_X Y,Z} W \\ &\quad - (\partial_X f)\cdot \mathrm{D}^2_{Y,Z} W - f\cdot \mathrm{D}^2_{Y,\mathrm{D}_X Z} W \\ &= f\cdot \mathrm{D}^3_{X,Y,Z} W \end{aligned}$$

■

Für das zweite Argument geht die Rechnung analog, für das erste ist die entsprechende Aussage offensichtlich.

Ebenso benötige ich

Definition 1.3

$$\mathrm{D}^3_{X,Y,Z}B := \mathrm{D}_X(\mathrm{D}^2_{Y,Z}B) - \mathrm{D}^2_{\mathrm{D}_X Y,Z}B - \mathrm{D}^2_{Y,\mathrm{D}_X Z}B$$

Dies ist dann natürlich auch tensoriell. Diese höheren Ableitungen lassen sich einfach weiterdifferenzieren, so gilt z.B.

$$\partial_X \langle \mathrm{D}_Y B, \mathrm{D}^2_{V,W}C\rangle = \langle \mathrm{D}^2_{X,Y}B, \mathrm{D}^2_{V,W}C\rangle + \langle \mathrm{D}_Y B, \mathrm{D}^3_{X,V,W}C\rangle.$$

Der Beweis geht wie bei der Produktregel (Satz 1.1), da die Störterme mit einfachen Ableitungen der Basiselemente ja bei p immer verschwinden.

Nützlich ist auch eine weitere Darstellung der dritten Ableitung, die für Vektorfelder wie für Endomorphismen gilt:

$$\mathrm{D}^3_{X,Y,Z}B = \mathrm{D}^2_{X,Y}(\mathrm{D}_Z B) - \mathrm{D}_{\mathrm{D}^2_{X,Y}Z}B - \mathrm{D}^2_{X,\mathrm{D}_Y Z}B - \mathrm{D}^2_{Y,\mathrm{D}_X Z}B \tag{1.6}$$

Beweis: Dies ist in Wahrheit nichts als die Produktregel für zweite Ableitungen. Es gilt nämlich für Produkte $C \times D$, die die Produktregel $\mathrm{D}_X(C \times D) = (\mathrm{D}_X C) \times D + C \times (\mathrm{D}_X D)$ erfüllen:

$$\mathrm{D}^2_{X,Y}(C \times D) = (\mathrm{D}^2_{X,Y}C) \times D + (\mathrm{D}_X C) \times (\mathrm{D}_Y D) + (\mathrm{D}_Y C) \times (\mathrm{D}_X D) + C \times (\mathrm{D}^2_{X,Y}D)$$

Wenn man jetzt $C = \mathrm{D}B$ als Differential eines Endomorphismenfeldes und $D = Z$ als Vektorfeld auffasst und definiert:

$$C \times D = (\mathrm{D}B) \times Z := \mathrm{D}_Z B,$$

so erfüllt dieses Produkt „$\times$“ sicherlich die obige einfache Produktregel, weil die Definitionen so gemacht sind:

$$\mathrm{D}_X(C \times D) = \mathrm{D}_X(\mathrm{D}_Z B) = \mathrm{D}^2_{X,Y}B + \mathrm{D}_{\mathrm{D}_X Z}B = (\mathrm{D}_X C) \times D + C \times (\mathrm{D}_X D)$$

Dann schreibt sich die andere Regel so:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}^2_{X,Y}(\mathrm{D}B)) \times Z &= \mathrm{D}^3_{X,Y,Z}B \\
(\mathrm{D}_X(\mathrm{D}B)) \times (\mathrm{D}_Y Z) &= \mathrm{D}^2_{X,\mathrm{D}_Y Z}B \\
(\mathrm{D}_Y(\mathrm{D}B)) \times (\mathrm{D}_X Z) &= \mathrm{D}^2_{Y,\mathrm{D}_X Z}B \\
(\mathrm{D}B) \times (\mathrm{D}^2_{X,Y}Z) &= \mathrm{D}_{\mathrm{D}^2_{X,Y}Z}B
\end{aligned}$$

■

Daraus ergeben sich mit Satz 1.2 die folgenden Vertauschungsregeln, die nun für beliebige Vektorfelder gelten:

$$(\mathrm{D}^2_{Y,Z} - \mathrm{D}^2_{Z,Y})B = \mathrm{R}(Y,Z)B - B \cdot \mathrm{R}(Y,Z), \quad \text{also}$$

Satz 1.3 *Für Vektorfelder X, Y, Z gilt:*

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}^3_{X,Y,Z} - \mathrm{D}^3_{X,Z,Y})B =& (\mathrm{D}_X\mathrm{R})(Y,Z)B + \mathrm{R}(Y,Z)(\mathrm{D}_X B)\\ &- (\mathrm{D}_X B)\mathrm{R}(Y,Z) - B(\mathrm{D}_X\mathrm{R})(Y,Z)\end{aligned}$$

Auch ergibt sich:

$$(\mathrm{D}^2_{X,Y} - \mathrm{D}^2_{Y,X})(\mathrm{D}_Z B) = \begin{cases} \mathrm{R}(X,Y)(\mathrm{D}_Z B) - (\mathrm{D}_Z B)\mathrm{R}(X,Y) \\ \text{oder nach (1.6)} \\ (\mathrm{D}^3_{X,Y,Z} - \mathrm{D}^3_{Y,X,Z})B + \mathrm{D}_{\mathrm{R}(X,Y)Z}B \end{cases}$$

Damit folgt die nächste Vertauschungsregel:

Satz 1.4 *X, Y, Z seien Vektorfelder. Dann gilt:*

$$(\mathrm{D}^3_{X,Y,Z} - \mathrm{D}^3_{Y,X,Z})B = \mathrm{R}(X,Y)(\mathrm{D}_Z B) - (\mathrm{D}_Z B)\mathrm{R}(X,Y) - \mathrm{D}_{\mathrm{R}(X,Y)Z}B.$$

Aus diesen beiden Vertauschungen, die ja Transpositionen der ersten bzw. letzten beiden Argumente darstellen, lassen sich nun alle weitere Vertauschungsregeln zusammensetzen. In Kapitel 2 wird folgende Regel verwendet:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D}^3_{X,X,Y} - \mathrm{D}^3_{Y,X,X})A\\ &\quad= (\mathrm{D}^3_{X,X,Y} - \mathrm{D}^3_{X,Y,X})A + (\mathrm{D}^3_{X,Y,X} - \mathrm{D}^3_{Y,X,X})A\\ &\quad= (\mathrm{D}_X\mathrm{R})(X,Y)A + \mathrm{R}(X,Y)(\mathrm{D}_X A) - (\mathrm{D}_X A)\mathrm{R}(X,Y) - A(\mathrm{D}_X\mathrm{R})(X,Y)\\ &\qquad+ \mathrm{R}(X,Y)(\mathrm{D}_X A) - (\mathrm{D}_X A)\mathrm{R}(X,Y) - \mathrm{D}_{\mathrm{R}(X,Y)X}A \qquad (1.7)\\ &\quad= (\mathrm{D}_X\mathrm{R})(X,Y)A + 2\mathrm{R}(X,Y)(\mathrm{D}_X A) - 2(\mathrm{D}_X A)\mathrm{R}(X,Y) - A(\mathrm{D}_X\mathrm{R})(X,Y)\\ &\qquad- \mathrm{D}_{\mathrm{R}(X,Y)X}A.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Codazzigleichung wird übrigens aus Satz 1.4:

$$\begin{aligned}&\langle(\mathrm{D}^3_{X,Y,Z} - \mathrm{D}^3_{Y,X,Z})A\cdot V, W\rangle\\ &\quad= \langle\mathrm{R}(X,Y)\mathrm{D}_Z A\cdot V, W\rangle - \langle\mathrm{R}(X,Y)V, \mathrm{D}_Z A\cdot W\rangle - \langle\mathrm{D}_{\mathrm{R}(X,Y)Z}A\cdot V, W\rangle\\ &\quad= \langle\mathrm{R}(X,Y)\mathrm{D}_Z A\cdot V, W\rangle + \langle\mathrm{R}(X,Y)\mathrm{D}_Z A\cdot W, V\rangle - \langle\mathrm{D}_V A\cdot\mathrm{R}(X,Y)Z, W\rangle \qquad (1.8)\\ &\quad= \langle\mathrm{R}(X,Y)\mathrm{D}_Z A\cdot V, W\rangle + \langle\mathrm{R}(X,Y)\mathrm{D}_W A\cdot Z, V\rangle + \langle\mathrm{R}(X,Y)\mathrm{D}_V A\cdot W, Z\rangle,\end{aligned}$$

was schon zeigt, wie übersichtlich diese Formeln werden, da sie ja die Symmetrien von $\mathrm{D}A$ behalten müssen!

1.3 Wichtige Identitäten

Die folgenden Zusammenhänge werde ich immer wieder verwenden, auch *ohne* jedesmal auf sie zu verweisen.

1. **Symmetrien bleiben beim Differenzieren erhalten**, da es sich um *tensorielle* Ableitungen handelt.

   Beispielhaft: Es gilt zwar i.A. $\langle \mathrm{D}^2_{X,Y} A\cdot V, W\rangle \neq \langle \mathrm{D}^2_{Y,X} A\cdot V, W\rangle$. Aber:

   $$\langle \mathrm{D}^2_{X,Y} A\cdot V, W\rangle = \langle \mathrm{D}^2_{X,V} A\cdot Y, W\rangle = \langle \mathrm{D}^2_{X,W} A\cdot Y, V\rangle$$

   Beweis: Es reicht, dies an einem beliebigen Punkt auszurechnen, da die Gleichungen tensoriell sind. Man kann also annehmen, daß X, Y, Z und W in p parallel sind.

   $$\Longrightarrow \langle \mathrm{D}^2_{X,Y} A\cdot V, W\rangle = \partial_X \langle (\mathrm{D}_Y A)V, W\rangle$$

2. **Δf ist auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten eine interessante Größe:**

   Nach dem Satz von Stokes gilt dann nämlich, da $\partial M = \emptyset$:

   $$\int_M \Delta f \ \mathrm{dvol} = 0$$

   (Also mit dem Zwischenwertsatz: $\exists p \in M : \ \Delta f(p) = 0$).

   Damit beweist man das

   Lemma 1.5 (Hopf) *M sei kompakte Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$, $\Delta f \geq 0 \implies f = \mathrm{const}$*

   Beweis: (siehe [5, S. 56])

   $k := \min_M f$, also $f + k \geq 0$. Es gilt

   $$\Delta(f+k)^2 = 2(f+k)\Delta f \ + \ 2\|\nabla f\|^2$$

   Weil

   $$\int_M \Delta(f+k)^2 \ \mathrm{dvol} = 0$$

   und

   $$\Delta(f+k)^2 \geq 0$$

   folgt $\Delta(f+k)^2 = 0$, also $\|\nabla f\| = 0$. ∎

3. **Die Aufspaltung von Skalarprodukten** aus der linearen Algebra:

   $$\langle X, Y\rangle = \sum_i \langle X, e_i\rangle\langle e_i, Y\rangle \tag{1.9}$$

   Also z.B.:

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle &= \sum_i \langle Ae_i, Ae_i\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle\langle e_j, Ae_i\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle^2\end{aligned}$$

Auch folgt für symmetrische Endomorphismen B die wichtige Darstellung:

$$\sum_i \langle X, e_i\rangle Be_i = BX \tag{1.10}$$

Beweis: Erfolgt durch skalare Multiplikation mit einem beliebigen Y:

$$\begin{aligned}\sum_i \langle X, e_i\rangle\langle Be_i, Y\rangle &= \sum_i \langle X, e_i\rangle\langle e_i, BY\rangle \\ &= \langle X, BY\rangle \\ &= \langle BX, Y\rangle\end{aligned}$$

4. **Wichtige Ungleichungen:**

Die Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned}&(a-b)^2 \geq 0 \\ \Longrightarrow\ &a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ \Longrightarrow\ &2ab \leq a^2 + b^2 \qquad (1.11)\end{aligned}$$

bzw. mit $(a+b)^2$:

$$-2ab \leq a^2 + b^2 \tag{1.12}$$

Oder in der allgemeineren Form:

$$\left(\frac{a}{\lambda} \pm \lambda b\right)^2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow\ \pm 2ab \leq \frac{a^2}{\lambda^2} + \lambda^2 b^2 \tag{1.13}$$

Daraus folgt dann auch:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \tag{1.14}$$

Weiterhin wichtig ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \tag{1.15}$$

Sie kommt vor allem in dieser Form vor:

$$\Big(\sum_i x_i y_i\Big)^2 \le \Big(\sum_i x_i^2\Big)\Big(\sum_i y_i^2\Big) \tag{1.16}$$

bzw. für Endomorphismen:

$$\langle B, C\rangle^2 \le \langle B, B\rangle\langle C, C\rangle \tag{1.17}$$

Schließlich gilt noch für Polynome zweiten Grades:

$$ax^2 + bx \ge -\frac{b^2}{4a} \qquad (\text{falls } a > 0), \tag{1.18}$$

weil dies den Minimalwert am Scheitelpunkt darstellt.

5. **Die Symmetrieverträglichkeit des Skalarproduktes für Endomorphismen:**
   Die Symmetrie von A bedeutet ja, daß $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$.
   Dies überträgt sich natürlich:

$$\begin{aligned}\langle AB, C\rangle &= \sum_i \langle ABe_i, Ce_i\rangle = \sum_i \langle Be_i, ACe_i\rangle \\ &= \langle B, AC\rangle\end{aligned}$$

   Außerdem gilt für symmetrische Endomorphismen A, B, C auch:

$$\langle AB, C\rangle = \langle BA, C\rangle \tag{1.19}$$

   Beweis: Dies beruht auf der Tatsache, daß schiefe Endomorphismen auf symmetrischen senkrecht stehen. Sei E schief. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle A, E\rangle &= \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j\rangle\langle Ee_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i<j} \langle Ae_i, e_j\rangle\langle Ee_i, e_j\rangle + \sum_{i>j} \langle Ae_i, e_j\rangle\langle Ee_i, e_j\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

   Da $AB - BA$ schief ist, folgt die Behauptung. ∎

   Durch Klammerung läßt sich dieses Resultat auch für vier symmetrische Endomorphismen formulieren:

$$\langle AB, CD\rangle = \langle BA, DC\rangle \tag{1.20}$$

6. **Globale Identitäten weiterdifferenzieren:**

   Ausdrücken, in denen λ_i vorkommt, ist mit einem gewissen Mißtrauen zu begegnen, da sie offenbar nur an einem Punkt gelten. Auch lassen sie sich nicht weiter differenzieren, man muß sie erst in gleichwertige Terme in A umwandeln.

Identitäten, die auf ganz M gelten, lassen sich hingegen natürlich differenzieren. Etwa:

$$\langle A, \mathrm{id}\rangle = 0 \implies \langle \mathrm{D}_X A, \mathrm{id}\rangle = 0$$

Mit Hilfe der Codazzigleichung folgt dann die für das Folgende zentrale Formel:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \langle (\mathrm{D}_X A)e_i, e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_i, X\rangle \qquad \text{für alle } X, \text{ also:} \\ 0 &= \sum_i (\mathrm{D}_{e_i} A)e_i \end{aligned} \tag{1.21}$$

Weiter differenziert ergibt dies:

$$\sum_i (\mathrm{D}^2_{X,e_i} A)e_i = 0 \tag{1.22}$$

Auch gilt:

$$\langle A, A\rangle = S \implies 2\langle \mathrm{D}_X A, A\rangle = \partial_X S$$

Eine weitere Differentiation ergibt:

$$\langle D^2_{X,X} A, A\rangle + \|\mathrm{D}_X A\|^2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2_{X,X} S \qquad (= 0, \text{ falls } S \text{ konstant}) \tag{1.23}$$

Für $\nabla S = \sum_i (\partial_{e_i} S)e_i$ ergibt sich ferner die Darstellung:

$$\nabla S = 2\sum_i (\mathrm{D}_{e_i} A)Ae_i \tag{1.24}$$

Der Beweis erfolgt durch skalare Multiplikation mit einem Basisvektor:

$$\begin{aligned} \langle \nabla S, e_k\rangle &= 2\sum_i \langle D_{e_i} A, A\rangle\langle e_i, e_k\rangle \\ &= 2\sum_j \langle (\mathrm{D}_{e_k} A)e_j, Ae_j\rangle \\ &= 2\langle \sum_j (\mathrm{D}_{e_j} A)Ae_j, e_k\rangle \end{aligned}$$

■

Kapitel 2

Allgemeine Hyperflächengleichungen

Die folgenden Rechnungen gehen im Wesentlichen auf [10] bzw. [11] zurück. M sei eine minimale Hyperfläche in der S^{n+1} mit Weingartenabbildung A. Aus der Gaußgleichung folgt, daß der Krümmungstensor R über die Metrik und A berechenbar ist:

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle AY,Z\rangle AX - \langle AX,Z\rangle AY, \tag{2.1}$$

also

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_V\mathrm{R})(X,Y)Z = {} & \langle(\mathrm{D}_V A)Y,Z\rangle AX + \langle AY,Z\rangle(\mathrm{D}_V A)X \\ & - \langle(\mathrm{D}_V A)X,Z\rangle AY - \langle AX,Z\rangle(\mathrm{D}_V A)Y\end{aligned} \tag{2.2}$$

Der Krümmungstensor erfüllt die bekannten Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{R}(X,Y)V,W\rangle &= -\langle \mathrm{R}(Y,X)V,W\rangle = -\langle \mathrm{R}(X,Y)W,V\rangle \\ &= \langle \mathrm{R}(V,W)X,Y\rangle\end{aligned}$$

M ist minimal, also:

$$\langle A, \mathrm{id}\rangle = 0 \tag{2.3}$$

$$S := \langle A, A\rangle$$

Der Ricci-Tensor $\mathrm{Ric}(X)$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X) &:= \sum_i \mathrm{R}(X,e_i)e_i \\ &= nX - X + 0 - \sum_i \langle AX,e_i\rangle Ae_i \\ &= (n-1)X - A^2X\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\text{spur Ric} &= \sum_i \langle \mathrm{Ric}(e_i), e_i\rangle \\ &= n(n-1) - \langle A^2, \mathrm{id}\rangle\end{aligned}$$

Also folgt:

$$S = n(n-1) - \text{spur Ric} \tag{2.4}$$

S ist demnach intrinsisch. Nicht nur bei dieser ersten Spurbildung über den Krümmungstensor entstehen so einfache Ausdrücke. Ich fasse diese daher mit Hilfe von (1.10) in einem Lemma zusammen:

Lemma 2.1

$$\sum_i \mathrm{R}(X, e_i)e_i = (n-1)X - A^2X \tag{2.5}$$

$$\sum_i \mathrm{R}(X, e_i)Ae_i = -AX + S\cdot AX - A^3X \tag{2.6}$$

$$\sum_i \mathrm{R}(X, e_i)(\mathrm{D}_Y A)e_i = -(\mathrm{D}_Y A)X - A(\mathrm{D}_Y A)AX + \tfrac{1}{2}(\partial_Y S)AX \tag{2.7}$$

$$\sum_i (\mathrm{D}_{e_i} R)(e_i, Y)Z = A(\mathrm{D}_Y A)Z - (\mathrm{D}_Y A)AZ \tag{2.8}$$

Beweis: Die Gleichungen folgen unmittelbar durch einsetzen. Exemplarisch sei hier (2.8) gezeigt:

$$\begin{aligned}\sum_i (\mathrm{D}_{e_i} R)(e_i, Y)Z = \sum_i \Big(&\langle (\mathrm{D}_{e_i} A)Y, Z\rangle Ae_i + \langle AY, Z\rangle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_i \\ &- \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_i, Z\rangle AY - \langle Ae_i, Z\rangle (\mathrm{D}_{e_i} A)Y\Big) \\ \overset{(1.21)}{=} &\sum_i \langle (\mathrm{D}_Y A)Z, e_i\rangle Ae_i + 0 - 0 - \sum_i \langle AZ, e_i\rangle (\mathrm{D}_Y A)e_i \\ \overset{(1.10)}{=} &A(\mathrm{D}_Y A)Z - (\mathrm{D}_Y A)AZ\end{aligned}$$

■

Es wird nun noch *nicht* vorausgesetzt, daß S konstant ist. Es zeigt sich, daß es lohnt, den Laplace von S auszurechnen:

$$\partial_X S = 2\langle \mathrm{D}_X A, A\rangle \tag{2.9}$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2_{X,X} S = \langle \mathrm{D}^2_{X,X} A, A\rangle + \|\mathrm{D}_X A\|^2 \tag{2.10}$$

Also gilt mit $\|\mathrm{D}A\|^2 := \sum_{i,j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_j, e_k\rangle^2 = \sum_i \|\mathrm{D}_{e_i} A\|^2$:

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_i \langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A, A\rangle + \|\mathrm{D}A\|^2 \tag{2.11}$$

Aus (1.22) folgt mittels der Vertauschungsregel aus Satz 1.2 folgende Identität:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i (\mathrm{D}^2_{V,e_i} A)e_i \\ &= \sum_i ((\mathrm{D}^2_{e_i,V} A)e_i + \mathrm{R}(V,e_i)Ae_i - A\mathrm{R}(V,e_i)e_i) \\ &= \sum_i (\mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A)V + 0 - AV + S\cdot AV - A^3V - A(nV - V - A^2V) \end{aligned}$$

Also folgt:

Lemma 2.2 *Für die Weingartenabbildung gilt:*

$$\sum_i \mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A = (n-S)A$$

Dann ergibt sich mit (2.11):

Satz 2.3 *Der Laplace von S erfüllt*

$$\frac{1}{2}\Delta S = (n-S)S + \|\mathrm{D}A\|^2$$

Daraus folgt nun schon eine handfeste Aussage:

Satz 2.4 *Ist $0 \le S \le n$, so folgt $S \equiv 0$ oder $S \equiv n$.*

Beweis: Ist $0 \le S \le n$, so ist offenbar $\Delta S \ge 0$, also folgt nach dem Lemma von Hopf (Lemma 1.5), daß $\Delta S = 0$ gelten muß. Damit gilt aber $S = n$ oder $S = 0$ (außerdem gilt noch: $\mathrm{D}A = 0$, also handelt es sich um eine isoparametrische Hyperfläche). ∎

Die damit verbundenen Einschränkungen sind so groß, daß die entsprechenden Minimalflächen vollständig bekannt sind (siehe [3, 7]). Falls $S = 0$, so sind alle Hauptkrümmungen auch gleich 0, also ist M totalgeodätisch. Ansonsten handelt es sich um Cliffordtori.

2.1 Der Laplace von $\|\mathrm{D}A\|^2$

Es werden nun analog Formeln für den Laplace von $\|\mathrm{D}A\|^2$ entwickelt, in der Hoffnung, auf ähnlich nützliche Beziehungen zu stoßen.

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}A\|^2 &= \sum\nolimits_j \langle \mathrm{D}_{e_j}A, \mathrm{D}_{e_j}A\rangle\\ \tfrac{1}{2}\partial_X\|\mathrm{D}A\|^2 &= \sum\nolimits_j \langle \mathrm{D}^2_{X,e_j}A, \mathrm{D}_{e_j}A\rangle\\ \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2_{X,X}\|\mathrm{D}A\|^2 &= \sum\nolimits_j \Big(\langle \mathrm{D}^3_{X,X,e_j}A, \mathrm{D}_{e_j}A\rangle + \langle D^2_{X,e_j}A, \mathrm{D}^2_{X,e_j}A\rangle\Big)\end{aligned}$$

Also folgt wie oben:

$$\frac{1}{2}\Delta\|\mathrm{D}A\|^2 = \sum_{i,j}\langle \mathrm{D}^3_{e_i,e_i,e_j}A, \mathrm{D}_{e_j}A\rangle + \|\mathrm{D}^2A\|^2 \tag{2.12}$$

mit $\|\mathrm{D}^2A\|^2 := \sum_{i,j}\|\mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A\|^2$.

Es muß also $\sum_i\langle \mathrm{D}^3_{e_i,e_i,V}A, D_VA\rangle$ bestimmt werden. Dazu helfen wieder die Vertauschungsregeln (Sätze 1.3,1.4), man muß nur *eine* der möglichen Vertauschungen elementar berechnen können. Aber

$$\begin{aligned}\sum_i \mathrm{D}^3_{V,e_i,e_i}A &= \partial_V\sum_i \mathrm{D}^2_{e_i,e_i}A\\ &= \partial_V\Big((n-S)A\Big) \quad \text{(nach Lemma 2.2)}\\ &= -(\partial_V S)A + (n-S)(\mathrm{D}_VA)\end{aligned} \tag{2.13}$$

Es geht also um den Ausdruck $\Big[(\mathrm{D}^3_{X,X,Y} - \mathrm{D}^3_{Y,X,X})A\Big]$. Vertauschungsregel (1.7) besagt:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{D}^3_{X,X,Y} - \mathrm{D}^3_{Y,X,X})A\\ &= (\mathrm{D}_X\mathrm{R})(X,Y)A + 2\mathrm{R}(X,Y)(\mathrm{D}_XA) - 2(\mathrm{D}_XA)\mathrm{R}(X,Y) - A(\mathrm{D}_X\mathrm{R})(X,Y)\\ &\quad - \mathrm{D}_{\mathrm{R}(X,Y)X}A\end{aligned} \tag{2.14}$$

Krümmungstensor und Ableitung sind aus (2.1) und (2.2) bekannt. Betrachte nun die fünf Terme aus (2.14) einzeln. Dazu wählt man $X = e_i$, $Y = V$, wendet alles auf W an und multipliziert skalar mit U. Um auf (2.12) zu kommen, bildet man hernach die Spur über V, W und $U = (\mathrm{D}_VA)W$. Es ergibt sich mit Lemma 2.1:

$$\begin{aligned}T_1 &= \operatorname*{spur}_{V,W}\sum\nolimits_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}R)(e_i,V)AW, (\mathrm{D}_VA)W\rangle\\ &= \operatorname*{spur}_{V,W}\Big(\langle A(\mathrm{D}_VA)AW, (\mathrm{D}_VA)W\rangle - \langle(\mathrm{D}_VA)A^2W, (\mathrm{D}_VA)W\rangle\Big)\\ &= \sum\nolimits_i\Big(\langle A(\mathrm{D}_{e_i}A), (\mathrm{D}_{e_i}A)A\rangle - \langle A(\mathrm{D}_{e_i}A), A(\mathrm{D}_{e_i}A)\rangle\Big)\\ &=: \mathcal{B} - \mathcal{A}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_2 &= 2 \operatorname*{spur}_{V,W} \sum\nolimits_i \langle R(e_i,V)(\mathrm{D}_{e_i}A)W, (\mathrm{D}_V A)W\rangle \\
&= 2 \operatorname*{spur}_{V,W} \Big(\langle (\mathrm{D}_W A)V, (\mathrm{D}_V A)W\rangle + \langle A(\mathrm{D}_W A)AV, (\mathrm{D}_V A)W\rangle - \tfrac{1}{2}(\partial_W S)\langle AV, (\mathrm{D}_V A)W\rangle \Big) \\
&= 2\|\mathrm{D}A\|^2 + 2\mathcal{B} - \tfrac{1}{2}\|\nabla S\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3 &= -2 \operatorname*{spur}_{V,W} \sum\nolimits_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)R(e_i,V)W, (\mathrm{D}_V A)W\rangle \\
&= -2 \operatorname*{spur}_{V,W} \sum\nolimits_i \langle R(V,e_i)(\mathrm{D}_{(\mathrm{D}_V A)W}A)e_i, W\rangle \\
&= 2 \operatorname*{spur}_{V,W} \Big(\langle (\mathrm{D}_{(\mathrm{D}_V A)W}A)V, W\rangle + \langle (\mathrm{D}_{(\mathrm{D}_V A)W}A)AV, AW\rangle - \langle A, \mathrm{D}_{(\mathrm{D}_V A)W}A\rangle\langle AV, W\rangle \Big) \\
&= 2\|\mathrm{D}A\|^2 + 2\sum\nolimits_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{Ae_i}A)(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, Ae_j\rangle - 2\sum\nolimits_{i,j,k} \langle Ae_k, (\mathrm{D}_{e_k}A)(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j\rangle\langle Ae_i, e_j\rangle \\
&= 2\|\mathrm{D}A\|^2 + 2\sum\nolimits_{i,j,k} \langle Ae_j, (\mathrm{D}_{e_k}A)Ae_i\rangle\langle e_k, (\mathrm{D}_{e_i}A)e_j\rangle \\
&\qquad\qquad - 2\sum\nolimits_{i,j,k,l} \langle Ae_k, (\mathrm{D}_{e_k}A)e_l\rangle\langle (\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_l\rangle\langle Ae_i, e_j\rangle \\
&= 2\|\mathrm{D}A\|^2 + 2\mathcal{B} - \tfrac{1}{2}\|\nabla S\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_4 &= -\operatorname*{spur}_{V,W} \sum\nolimits_i \langle A(\mathrm{D}_{e_i}R)(e_i,V)W, (\mathrm{D}_V A)W\rangle \\
&= \operatorname*{spur}_{V,W} \sum\nolimits_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}R)(e_i,V)A(\mathrm{D}_V A)W, W\rangle \\
&= \operatorname*{spur}_{V,W} \Big(\langle A(D_V A)A(\mathrm{D}_V A)W, W\rangle - \langle (D_V A)A^2(\mathrm{D}_V A)W, W\rangle \Big) \\
&= \mathcal{B} - \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_5 &= -\operatorname*{spur}_{V,W} \sum\nolimits_i \langle (\mathrm{D}_{\mathrm{R}(e_i,V)e_i}A)W, (\mathrm{D}_V A)W\rangle \\
&= \operatorname*{spur}_{V,W} \Big((n-1)\langle (D_V A)W, (\mathrm{D}_V A)W\rangle - \langle (\mathrm{D}_{A^2V}A)W, (\mathrm{D}_V A)W\rangle \Big) \\
&= (n-1)\|\mathrm{D}A\|^2 - \sum\nolimits_j \langle (\mathrm{D}_{e_j}A)A^2, \mathrm{D}_{e_j}A\rangle \\
&= (n-1)\|\mathrm{D}A\|^2 - \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

Mit (2.13) wird nun aus (2.12):

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Delta\Big(\|\mathrm{D}A\|^2\Big) &= \sum_{i,j} \langle \mathrm{D}^3_{e_i,e_i,e_j}A, \mathrm{D}_{e_j}A\rangle + \|\mathrm{D}^2 A\|^2 \\
&= -\sum\nolimits_i \partial_{e_i} S\langle A, \mathrm{D}_{e_i}A\rangle + (n-S)\|\mathrm{D}A\|^2 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \|\mathrm{D}^2 A\|^2 \\
&= (2n - S + 3)\|\mathrm{D}A\|^2 + 6\mathcal{B} - 3\mathcal{A} - \frac{3}{2}\|\nabla S\|^2 + \|\mathrm{D}^2 A\|^2
\end{aligned}
$$

Damit folgt (siehe [11]):

Satz 2.5 (Peng,Terng) *Für den Laplace von der Norm der Ableitung der Weingartenabbildung gilt:*

$$\frac{1}{2}\Delta\left(\|\mathrm{D}A\|^2\right) = (2n+3-S)\|\mathrm{D}A\|^2 + 3(2\mathcal{B}-\mathcal{A}) - \frac{3}{2}\|\nabla S\|^2 + \|\mathrm{D}^2 A\|^2$$

$$\textit{mit}\quad \begin{array}{rcl}\mathcal{A} &=& \sum_i \lambda_i^2 \|\mathrm{D}_{e_i} A\|^2 \\ \mathcal{B} &=& \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \|\mathrm{D}_{e_i} A e_j\|^2\end{array} \qquad \textit{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} &=& \sum_i \|A\mathrm{D}_{e_i} A\|^2 \\ &=& \sum_i \langle A\cdot \mathrm{D}_{e_i} A, \mathrm{D}_{e_i} A\cdot A\rangle\end{array}.$$

Anmerkung: Das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellung wie denen für $\mathcal{A}$ wird häufig vorkommen, ich führe die Beweise nicht immer aus. Hier gilt für $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\sum_i \|A\mathrm{D}_{e_i} A\|^2 &= \sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) Ae_j, (\mathrm{D}_{e_i} A) Ae_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{Ae_j} A) e_i, (\mathrm{D}_{Ae_j} A) e_i\rangle \\ &= \sum_j \lambda_j^2 \langle \mathrm{D}_{e_j} A, \mathrm{D}_{e_j} A\rangle\end{aligned}$$

Die folgenden Kapitel werden nun diese Formeln auswerten.

Die elementarsymmetrischen Funktionen über den Hauptkrümmungen spielen bei den Rechnungen offenbar eine große Rolle. So ist die Summe der λ_i gleich 0, und die Summe der Quadrate gleich S. Aber auch die beiden nächsten Potenzen werden noch häufiger auftreten. Man kann sie folgendermaßen notieren:

$$\langle A^k, \mathrm{id}\rangle = \sum_i \lambda_i^k \qquad (= \langle A^{k-1}, A\rangle)$$

Mit Hilfe der Vertauschung *in* den Skalarprodukten nach (1.19) kann man leicht den Laplace dieser Terme bestimmen:

Lemma 2.6 *Es gilt:*

$$\frac{1}{3}\Delta\langle A^3, \mathrm{id}\rangle = (n-S)\langle A^3, \mathrm{id}\rangle + 2\sum_i \langle (D_{e_i} A)^2, A\rangle \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{4}\Delta\langle A^4, \mathrm{id}\rangle = (n-S)\langle A^4, \mathrm{id}\rangle + 2\mathcal{A} + \mathcal{B} \tag{2.16}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\partial_X\langle A^2, A\rangle &= \langle (\mathrm{D}_X A)A, A\rangle + \langle A(\mathrm{D}_X A), A\rangle + \langle A^2, \mathrm{D}_X A\rangle \\ &= 3\langle \mathrm{D}_X A, A^2\rangle \\ \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2_{X,X}\langle A^2, A\rangle &= \langle \mathrm{D}^2_{X,X} A, A^2\rangle + 2\langle (D_X A)^2, A\rangle\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2 folgt (2.15). Analog gilt:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\partial_X(\langle A^2, A^2\rangle) &= \langle (\mathrm{D}_X A)A + A(\mathrm{D}_X A), A^2\rangle = 2\langle (\mathrm{D}_X A), A^3\rangle \\ \tfrac{1}{4}\mathrm{D}^2_{X,X}(\langle A^2, A^2\rangle) &= \langle \mathrm{D}^2_{X,X} A, A^3\rangle + \langle D_X A, (D_X A)A^2 + A(\mathrm{D}_X A)A + A^2(\mathrm{D}_X A)\rangle \\ \Longrightarrow\ \tfrac{1}{4}\Delta(\langle A^2, A^2\rangle) &= -(S-n)\langle A^4, \mathrm{id}\rangle + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{A}\end{aligned}$$

Ein einfaches Lemma zu den Termen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ füge ich noch an:

Lemma 2.7 *Es gilt:*

$$3(\mathcal{A}+2\mathcal{B}) = \sum_{i,j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_j, e_k\rangle^2 (\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)^2 \geq 0$$

Beweis: Aus der Definition folgt direkt, daß:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}+2\mathcal{B} &= \tfrac{1}{3}\sum_{i,j,k}(\lambda_i^2+\lambda_j^2+\lambda_k^2+2(\lambda_i\lambda_j+2\lambda_i\lambda_k+2\lambda_j\lambda_k))\langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_j, e_k\rangle^2 \\
&= \tfrac{1}{3}\sum_{i,j,k}\langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_j, e_k\rangle^2 (\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

■

Kapitel 3

Die isoparametrischen Hyperflächen nach Münzner

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem isoparametrischen Spezialfall. Die folgenden Überlegungen werden teilweise in Kapitel 5 für den Beweis benötigt. Sie bieten aber auch die Möglichkeit, einmal Flächen kennenzulernen, die die geforderten Bedingungen erfüllen – es sind nicht viele Beispiele von minimalen Hyperflächen in der S^{n+1} bekannt.

Die isoparametrischen Hyperflächen lassen sich so charakterisieren, daß die Hauptkrümmungen mit Multiplizitäten konstant bleiben. Cartan (z.B. [1]) hat diese Flächen studiert und erzielte folgendes Ergebnis:

Satz 3.1 (Cartan) *M sei isoparametrische Hyperflächenimmersion in der S^{n+1}. λ_i bezeichne die (konstanten) Hauptkrümmungen mit Multiplizität m_i. Dann gilt:*

$$\forall i, 1 \leq i \leq p: \qquad \sum_{j \neq i} m_j \frac{1 + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

Damit wird der Wertebereich der Hauptkrümmungen schon etwas eingeschränkt. Münzner [8] hat bewiesen, daß die Hauptkrümmungen eine 1-Parameter-Schar bilden. Genauer gilt

Satz 3.2 (Münzner) *$\lambda_1 > \ldots > \lambda_p$ seien die Hauptkrümmungen einer isoparametrischen Hyperfläche in der S^{n+1} mit Multiplizitäten m_i. Setze*

$$\operatorname{cotg} \vartheta_i := \lambda_i, \qquad 0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_p < \pi.$$

Dann gilt:

1. *p kann nur die Werte 1,2,3,4 oder 6 annehmen.*
2. *Für ungerades p sind alle Multiplizitäten gleich.*
3. *Bei geradem p gilt $m_i = m_{i+2}$.*
4. *$\vartheta_i = \vartheta_1 + (i-1)\frac{\pi}{p}$.*

Versuche nun, aus dieser Schar von Hyperflächen die minimalen herauszufinden, also solche mit $\sum_i m_i\lambda_i = 0$. Für diesen Fall bestimmt man dann $S = \sum_i \lambda_i^2$. Der folgende Satz findet sich ohne Beweis in [10]:

Satz 3.3 (Peng,Terng) *M sei minimale Hyperflächenimmersion in die S^{n+1} mit konstanten Hauptkrümmungen. Das Quadrat der Norm der Weingartenabbildung, S, kann dann nur die Werte 0, n, $2n$, $3n$ oder $5n$ annehmen. Genauer gilt: Wenn die Fläche p verschiedene Hauptkrümmungen hat, so gilt $S = (p-1)n$. Weiterhin existiert für jede Kombination von Multiplizitäten auch eine Minimalfläche.*

Beweis: Zunächst ist das Ergebnis von Münzner in etwas handlichere Form zu bringen. Die Hauptkrümmungen sind wegen der Monotonie vom cotg offenbar absteigend sortiert und es gilt:

$$\lambda_i = \operatorname{cotg}\Big(\vartheta_1 + (i-1)\frac{\pi}{p}\Big) \tag{3.1}$$

Nach den Additionstheoremen für sin und cos gilt:

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)} \tag{3.2}$$

Daher gilt für jedes p:

$$c_i := \cos\Big((i-1)\frac{\pi}{p}\Big), \qquad s_i := \sin\Big((i-1)\frac{\pi}{p}\Big) \tag{3.3}$$

$$\lambda_i = \frac{\lambda_1 \cdot c_i - s_i}{\lambda_1 \cdot s_i + c_i} \tag{3.4}$$

Weil die ϑ_i alle zwischen 0 und π liegen müssen, also $\vartheta_1 < \frac{\pi}{p}$, gilt ferner

$$\lambda_1 > \operatorname{cotg}\Big(\frac{\pi}{p}\Big) \tag{3.5}$$

und wegen der Minimalität

$$\sum_i m_i\lambda_i = 0. \tag{3.6}$$

Nur für gerades p treten zwei Multiplizitäten auf. Setze dann

$$m := m_1, \qquad r \cdot m_1 := m_2. \tag{3.7}$$

Die Summe der Multiplizitäten muß gleich n sein. Es gilt also

$$n = \begin{cases} p \cdot m & \text{für ungerades } p \\ \frac{p}{2} \cdot m(r+1) & \text{für gerades } p. \end{cases} \tag{3.8}$$

Ich führe nun den Beweis von Satz 3.3 für jedes p einzeln:

$p = 1$: Es gibt nur eine Hauptkrümmung, λ_1. Wegen (3.6) gilt $\lambda_1 = 0$, also $S = 0$.

$p = 2$: $c_2 = 0$, $s_2 = 1$. (3.5) impliziert $\lambda_1 > 0$. Aus (3.3) folgt

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

Die Minimalität erfordert $m(\lambda_1 - r\frac{1}{\lambda_1}) = 0$, also $\lambda_1 = +\sqrt{r}$ und somit

$$S = mr + mr\frac{1}{r} = m(r+1) = n.$$

$p = 3$: Es gilt $t := \lambda_1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ und

$$\lambda_2 = \frac{t-\sqrt{3}}{\sqrt{3}t+1}, \qquad \lambda_3 = -\frac{t+\sqrt{3}}{\sqrt{3}t-1}.$$

Wegen der Minimalität gilt

$$\begin{aligned} t(3t^2-1) + (t-\sqrt{3})(\sqrt{3}t-1) - (t+\sqrt{3})(\sqrt{3}t+1) = 0 \\ \Longrightarrow\ 3t^3 - 9t = 0. \end{aligned}$$

Also muß $\lambda_1 = \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ sein und daher $S = 6m = 2n$.

$p = 4$: Wegen (3.5) folgt $t := \lambda_1 > 1$ und

$$\lambda_2 = \frac{t-1}{t+1}, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{t}, \qquad \lambda_4 = -\frac{t+1}{t-1}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \Big(t - \frac{1}{t}\Big) + r\Big(\frac{t-1}{t+1} - \frac{t+1}{t-1}\Big) = 0 \\ \Longrightarrow\ t^2(t^2-1) - (t^2-1) + rt(t-1)^2 - rt(t+1)^2 = 0 \\ \Longrightarrow\ t^4 - 2(1+2r)t^2 + 1 = 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} t^2 &= (1+2r) \pm \sqrt{4r^2+4r} \\ &= (r+1) + r \pm 2\sqrt{r}\cdot\sqrt{r+1} \\ &= \Big(\sqrt{r+1} \pm \sqrt{r}\Big)^2 \end{aligned}$$

Aus $t > 1$ folgt

$$\begin{aligned} t = \sqrt{r+1} + \sqrt{r} = \lambda_1 \qquad \text{und daher} \\ \frac{1}{t} = \sqrt{r+1} - \sqrt{r} = -\lambda_3. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 2(1+2r).$$

Um das Einsetzen in λ_2 und λ_4 zu ersparen, drückt man S mit Hilfe der Nebenbedingung (3.6) aus. Da $\lambda_4 = -1/\lambda_2$, gilt:

$$\begin{aligned} \left(\lambda_1 - \tfrac{1}{\lambda_1}\right) &= -r\left(\lambda_2 - \tfrac{1}{\lambda_2}\right) \\ \Longrightarrow\ \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 2 &= r^2(\lambda_2^2 + \lambda_4^2) - 2r^2 \\ \Longrightarrow\ r(\lambda_2^2 + \lambda_4^2) &= \frac{2}{r}(1+2r) + 2(r - \tfrac{1}{r}) = 2(2+r) \end{aligned}$$

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned} S &= m(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) + rm(\lambda_2^2 + \lambda_4^2) \\ &= 6m(r+1) \\ &= 3n \end{aligned}$$

Auch ist klar, daß sich für jedes $r > 0$ eine Lösung findet.

$p = 6$: Es gibt wieder zwei Multiplizitäten. Diesmal gilt $t > \sqrt{3}$ und für die Eigenwerte ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} & \lambda_1 = t & \lambda_2 = \dfrac{\sqrt{3}t - 1}{t + \sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\lambda_5} \\ \Phi(t) := & \lambda_3 = \dfrac{t - \sqrt{3}}{\sqrt{3}t + 1} & \lambda_4 = -\dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{\lambda_1} \\ \Psi(t) := & \lambda_5 = -\dfrac{t + \sqrt{3}}{\sqrt{3}t - 1} & \lambda_6 = -\dfrac{\sqrt{3}t + 1}{t - \sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\lambda_3} \end{array}$$

Die Minimalitätsbedingung lautet hier

$$\begin{aligned} & m(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5) + mr(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6) = 0 \\ \Longrightarrow\ & (t^2 - 3)\Big[t^2(3t^2 - 1) + t(t - \sqrt{3})(\sqrt{3}t - 1) - t(t + \sqrt{3})(\sqrt{3}t + 1)\Big] \\ & \quad + r(3t^2 - 1)\Big[-(t^2 - 3) + (\sqrt{3}t - 1)(t - \sqrt{3}) - (\sqrt{3}t + 1)(t + \sqrt{3})\Big] = 0 \\ \Longrightarrow\ & (t^2 - 3)\left(3t^4 - 9t^2\right) + r(3t^2 - 1)\left(-9t^2 + 3\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ t^6 - (6 + 9r)t^4 + (9 + 6r)t^2 - r = 0. \tag{3.9}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist so unübersichtlich, daß hier besser ein anderer Weg eingeschlagen wird. Offenbar gilt, daß (3.9), dargestellt durch λ_1, λ_3 und λ_5, symmetrisch in diesen drei Termen ist.

Nun gilt außerdem $\Phi(\Psi(t)) = t$, $\Psi(\Phi(t)) = t$ sowie $\Psi(\Psi(t)) = \Phi(t)$ und $\Phi(\Phi(t)) = \Psi(t)$. Die Menge $\{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5\}$ bleibt also unter Φ und Ψ erhalten. Daraus folgt: Ist $t = \lambda_1$ Lösung von (3.9), so auch $\Phi(t) = \lambda_3$ und $\Psi(t) = \lambda_5$.

Da die Potenzen in (3.9) alle gerade sind, sind auch die Negationen von Lösungen Lösungen. Dadurch fallen aber keine Lösungen von $\{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5\}$ zusammen: Weil $t > \sqrt{3}$, ist $\Phi(t) > 0 > \Psi(t)$. Die strenge Monotonie der Eigenwerte zeigt, daß überhaupt nur λ_5 Negation von λ_1 oder λ_3 sein kann. Aber für $t > \sqrt{3}$ gilt

$$-\lambda_5 = \frac{t+\sqrt{3}}{\sqrt{3}t-1} < \frac{2t}{2} = \lambda_1$$

Und $-\lambda_5 = \lambda_3$ hat nur die Lösung $t = 0$.

Die Lösungsmenge ist somit $\{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, -\lambda_1, -\lambda_3, -\lambda_5\}$. Das Produkt der Nullstellen ist notwendigerweise gleich $-r$ nach (3.9), also gilt

$$\lambda_1\lambda_3\lambda_5 = -\sqrt{r},$$

da λ_1 und λ_3 positiv sind, wogegen λ_5 negativ sein muß.

Durch einfaches Einsetzen der Ausdrücke in t erhält man ferner:

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_5 + \lambda_3\lambda_5 &= \frac{t(t-\sqrt{3})(\sqrt{3}t-1) - t(t+\sqrt{3})(\sqrt{3}t+1) - (t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{3t^2-1} \\ &= \frac{-8t^2 - t^2 + 3}{3t^2-1} \\ &= -3\end{aligned}$$

Zusammen läßt sich schließen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_5} &= \frac{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_5 + \lambda_3\lambda_5}{\lambda_1\lambda_3\lambda_5} \\ &= \frac{3}{\sqrt{r}}.\end{aligned}$$

Wegen der Minimalität gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5 &= r\Big(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_5}\Big) \\ &= 3\sqrt{r}.\end{aligned}$$

Quadriert man diese Identität, so folgt:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_5^2 &= 9r - 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_5 + \lambda_3\lambda_5) \\ &= 9r + 6.\end{aligned}$$

Quadriert man obige Identität zur Summe der Reziproken, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_5^2} &= \frac{9}{r} - 2\Big(\frac{\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5}{\lambda_1\lambda_3\lambda_5}\Big) \\ &= \frac{9}{r} + 6\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= m\Big(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_5^2\Big) + mr\Big(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} + \frac{1}{\lambda_5^2}\Big) \\ &= 15m(r+1) \\ &= 5n. \end{aligned}$$

Das Problem ist außerdem für beliebige r lösbar, denn das Polynom aus (3.9) nimmt für $t = \sqrt{3}$ folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} p(\sqrt{3}) &= 27 - 54 - 81r + 27 + 18r - r \\ &= -64r \\ &< 0. \end{aligned}$$

Es existiert also eine reelle Nullstelle größer $\sqrt{3}$, damit sind die anderen Nullstellen auch reell und wie oben berechnet. ∎

Kapitel 4

Konstantes S

Um mit dem Ausdruck in Satz 2.5 umgehen zu können, wird nun die Vereinfachung $S = \text{konst.}$ gemacht. Damit folgt natürlich $\Delta S = 0$, also wird aus Satz 2.3:

$$\|\mathrm{D}A\|^2 = S(S-n) \tag{4.1}$$

Damit ist $\|\mathrm{D}A\|$ auch konstant, also ist $\Delta\|\mathrm{D}A\|^2 = 0$. Satz 2.5 schreibt sich dann so:

$$\|\mathrm{D}^2A\|^2 = S(S-n)(S-2n-3) + 3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B}) \tag{4.2}$$

Aus Gleichung (4.1) folgt natürlich sofort analog zu Satz 2.4, daß S nicht zwischen 0 und n liegen kann. Außerdem sieht man auch, daß der Fall $S = 0$ oder $S = n$ äquivalent ist zu der Forderung $\mathrm{D}A = 0$, also einer isoparametrischen Hyperfläche.

Es soll nun der folgende Satz gezeigt werden, der sich samt Beweis in [10] findet:

Satz 4.1 (Peng,Terng) *M sei geschlossene, in die S^{n+1} immersierte minimale Hyperfläche mit konstantem S und $n \geq 3$. Falls $S > n$, dann gilt $S > n + \frac{1}{12n}$.*

Im Falle $n = 1$ ist der umgebende Raum der $\mathbb{R}^3$, in der die S^2 liegt. Die Hyperfläche ist dann eine Kurve, die wegen der Minimalität Krümmung 0 haben muß, es handelt sich also um eine Geodätische, in diesem Fall also ein Großkreis. Dann gilt natürlich $S = 0$.

Falls $n = 2$, so ist wegen der Minimalität $\lambda_1 = -\lambda_2$ und $S = 2\lambda_1^2$. Wenn S konstant ist, so also auch λ in jeder Zusammenhangskomponente. Es handelt sich daher um eine isoparametrische Hyperfläche mit maximal zwei Hauptkrümmungen. Gibt es nur eine, so ist wieder $S = 0$. Sonst sagt ein Satz (siehe z.B. [5, S.42] oder [7]): $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, also $\lambda_1 = \pm 1$. Damit gilt in diesem Fall $S = n$.

Man kann nun versuchen, obige Terme als Funktionen von S abzuschätzen. Das Vertrauen, daß dies gelingen wird, kommt daher, daß die linke Seite zwar fast unbekannt ist, in ihr aber Vertauschungen der 2. Ableitungen vorkommen müssen.

Diese Vertauschungen sind aber Terme in A und R, lassen sich also durch die Eigenwerte ausdrücken. Aber für $\mathcal{A}$ z.B. gilt:

$$\mathcal{A} \leq S \sum_i \|D_{e_i} A\|^2 = S \cdot S(S-n)$$

Auch hier läßt sich also hoffen, Ausdrücke in S zu erhalten. Genauer geht es darum, für $S > n$ eine Abschätzung der linken Seite nach unten zu erhalten, die im Grenzwert $S = n$ positiv ist, und die rechte Seite durch Terme mit Faktor $(S-n)$ nach oben abzuschätzen. Dann kann diese Ungleichung in einer Umgebung von n für S nicht gelten, und der Beweis ist fertig.

Die erste Etappe ist das

Lemma 4.2 *A sei die Weingartenabbildung der minimalen, in die S^{n+1} immersierte Hyperfläche und S sei die Norm von A zum Quadrat. Die Norm der zweiten Ableitung von A läßt sich abschätzen durch*

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \geq \frac{3}{2}\left(S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - 2S^2 + nS\right) \tag{4.3}$$

oder äquivalent

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \geq \frac{3}{2S} \sum_k \left(S + \lambda_k \langle A^3, \mathrm{id}\rangle - S\lambda_k^2\right)^2 \tag{4.4}$$

Anmerkung: Die Konstanz von S ist in diesem Lemma *nicht* vorausgesetzt!

Beweis: $\|\mathrm{D}^2 A\|^2$ besteht aus einer vierfachen Summe über alle Basisvektoren. Bringen wir jetzt die Vertauschungen ins Spiel. Wenn man in den erweiterten Krümmungstensor $(\langle \mathrm{R}(X,Y)V, W\rangle)$ orthogonale Eigenvektoren von A einsetzt, so sieht man, daß dieser Ausdruck verschwindet, wenn mehr als zwei verschiedene Vektoren beteiligt sind. Bei nur *einem* Vektor ist er natürlich wegen der Schiefsymmetrie auch Null.

Es bleibt also der Fall mit zwei unterschiedlichen Vektoren für die vier Argumente. Teile die Summe über $\langle D^2_{X,Y} AV, W\rangle$ entsprechend der Symmetrie in Y, V, W auf und lasse die anderen Terme wegen der Quadrate weg:

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{D}^2 A\|^2 &= \sum_{i,j,k,l} \langle (\mathrm{D}^2_{e_i,e_j} A) e_k, e_l\rangle^2 \\
&\geq \sum_{\substack{i,j,k,l \\ 2 \text{ unterschiedliche}}} \langle (\mathrm{D}^2_{e_i,e_j} A) e_k, e_l\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j\neq i} \left(\langle (\mathrm{D}^2_{e_i,e_j} A) e_i, e_j\rangle^2 + \langle (\mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A) e_j, e_j\rangle^2 + \langle (\mathrm{D}^2_{e_i,e_j} A) e_j, e_i\rangle^2\right) \\
\Longrightarrow \quad \|\mathrm{D}^2 A\|^2 &\geq 3 \sum_{i,j\neq i} \langle (\mathrm{D}^2_{e_i,e_j} A) e_i, e_j\rangle^2
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Diese Abschätzung ist natürlich nicht sonderlich gut, aber über die zweite Ableitung von A weiß man eben nicht sehr viel.

Betrachte nun den Ausdruck $\langle(\mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A)e_i,e_j\rangle^2$ etwas genauer. Dazu folgende Überlegungen:

$$
\begin{aligned}
&U(X,Y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\
&T(X,Y) := U(X,Y) - U(Y,X) \qquad \text{der schiefe Anteil.} \\
&V(X,Y) := U(X,Y) - \tfrac{1}{2}T(X,Y) = \tfrac{1}{2}\Big(U(X,Y) + U(Y,X)\Big) \quad \text{also symmetrisch.}
\end{aligned}
$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j\neq i} U(e_i,e_j)^2 &= \sum_{i,j\neq i} \Big(V(e_i,e_j) + \tfrac{1}{2}T(e_i,e_j)\Big)^2 \\
&= \sum_{i,j\neq i} V(e_i,e_j)^2 + \tfrac{1}{4}\sum_{i,j\neq i} T(e_i,e_j)^2 + \underbrace{\sum_{i,j\neq i} \overbrace{V(e_i,e_j)\cdot T(e_i,e_j)}^{\text{schief}}}_{\text{also } = 0} \\
&\geq \tfrac{1}{4}\sum_{i,j\neq i} T(e_i,e_j)^2
\end{aligned}
$$

Wenn man nun setzt:

$$U(X,Y) = \langle \mathrm{D}^2_{Y,X}AX, Y\rangle$$

Dann gilt für $i \neq j$:

$$
\begin{aligned}
T(e_i,e_j) &= \langle(\mathrm{D}^2_{e_j,e_i} - \mathrm{D}^2_{e_i,e_j})Ae_i, e_j\rangle \\
&= \langle \mathrm{R}(e_j,e_i)Ae_i, e_j\rangle + \langle \mathrm{R}(e_j,e_i)Ae_j, e_i\rangle \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)\langle \mathrm{R}(e_j,e_i)e_i, e_j\rangle \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)(1 - 0 + \lambda_i\lambda_j - 0) \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)(1 + \lambda_i\lambda_j)
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Für $i = j$ ist dieser Ausdruck Null, man kann also auch $j = i$ in die Summe aufnehmen. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{i,j} T(e_i,e_j)^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2(1 + \lambda_i\lambda_j)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j}\Big((\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i\lambda_j)(1 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2\lambda_j^2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i^2 \sum_j (1 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2\lambda_j^2) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j(1 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2\lambda_j^2) \\
&= \frac{1}{2}\Big(nS + 0 + S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - 0 - 2S^2 - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2\Big)
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Also folgt mit (4.5) schon:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}^2 A\|^2 &\geq 3 \sum_{i,j\neq i} U(e_i, e_j)^2 \\ &\geq \frac{3}{2}\left(S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - 2S^2 + nS\right)\end{aligned}$$

Für dieses Kapitel braucht man die zweite Darstellung. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}&\sum_i \left(S + \lambda_i\langle A^3, \mathrm{id}\rangle - S\lambda_i^2\right)^2 \\ &\quad= \sum_i \left(S^2 + \lambda_i^2\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 + S^2\lambda_i^4 + 2S\lambda_i\langle A^3, \mathrm{id}\rangle - 2S^2\lambda_i^2 - 2S\lambda_i^3\langle A^3, \mathrm{id}\rangle\right) \\ &\quad= nS^2 + S\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 + S^2\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - 0 - 2S^3 - 2S\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 \\ &\quad= S\left(S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - 2S^2 + nS\right)\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Lemma 4.2 fertig. ∎

Der Term $\sum_i (S + \lambda_i\langle A^3, \mathrm{id}\rangle - S\lambda_i^2)^2$ muß jetzt noch elementar weiter nach unten abgeschätzt werden. Zunächst wählt man nur *einen* Summanden mit Index k aus (die Terme sind ja alle positiv). Definiere

$$x := \lambda_k\langle A^3, \mathrm{id}\rangle - S\lambda_k^2.$$

Versuche nun, x abzuschätzen, um dann weitere Beziehungen zu erhalten. Eine Abschätzung für x allein reicht wegen des Quadrates in (4.4) allerdings nicht aus. Mit dem *Ansatz* $S \geq q$ gilt, falls auch $x \geq -q$:

$$(S + x) \geq (S - q) \geq 0$$

und somit:

$$(S + x)(S + x) \geq (S + x)(S - q) \geq (S - q)^2$$

Angenommen, das folgende Lemma wäre bereits gezeigt:

Lemma 4.3 *M sei n-dimensionale, in die S^{n+1} immersierte minimale Hyperfläche mit konstanter Norm der Weingartenabbildung und $S > n$. Dann gibt es einen Punkt p und eine Hauptkrümmung λ_k, so daß*

$$\lambda_k\langle A^3, \mathrm{id}\rangle - S\lambda_k^2 \geq -\frac{2S^2}{3n} \tag{4.8}$$

Mit diesem Lemma benötigt man also für eine Abschätzung von $\|\mathrm{D}^2 A\|^2$ als Zusatzvoraussetzung:

$$S \geq \frac{2}{3n}S^2$$

beziehungsweise

$$S \leq \frac{3}{2}n.$$

Diese Annahme kann man aber gefahrlos machen, da im gegenteiligen Falle die Aussage des Satzes wahr wäre. Das Lemma verhilft damit zu der Aussage

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \geq \frac{3}{2S}\left(S - \frac{2S^2}{3n}\right)^2 \tag{4.9}$$

Kommen wir nun zum **Beweis** des Lemmas per Widerspruch:

Falls die Aussage falsch ist, so gilt an jeder Stelle in M und für jede Hauptkrümmung:

$$S\lambda_k^2 - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \lambda_k - \frac{2S^2}{3n} > 0 \tag{4.10}$$

Dies ist unmöglich für $\lambda_k = 0$. Also werden die Hauptkrümmungen und damit die Eigenwerte von A niemals 0. Damit ist A invertierbar, und die Determinante von A wechselt das Vorzeichen nicht. Definiere also:

$$F := \log \det A \tag{4.11}$$

(Falls $\det A < 0$, so wählt man $F := \log(-\det A)$, der Beweis ist ansonsten identisch).

Als probates Mittel soll nun der Laplace von F bestimmt werden.

4.1 Die Ableitung der Determinante

Satz 4.4 *$B(t)$ sei eine 1-Parameter-Schar von diagonalisierbaren und invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen. Dann gilt:*

$$(\det B)' = \det(B) \cdot \langle B^{-1}, B' \rangle \tag{4.12}$$

Beweis: Mache die Rechnung nur an einem Punkt p. Dort wählt man die Basis so, daß B diagonalisiert ist mit Diagonalelementen λ_i, $\lambda_i \neq 0$ nach Voraussetzung.

$\det B(t)$ besteht ja aus einer Summe über Produkte der $\langle Be_i, e_j\rangle =: b_{ij}$. Ableiten erhält die Summe, und nach der Produktregel entstehen Terme, in denen ein Element abgeleitet ist und alle anderen nicht.

Betrachte diesen Ausdruck nun bei p: Dort sind alle Elemente neben der Diagonale gleich 0, aber die Ableitungen können ungleich 0 sein. Davon gibt es aber pro Term nur eine. Die Ableitung besteht also aus der Summe von Termen vom folgenden Typ:

$$i, \sigma \quad \text{fest:} \quad \epsilon(\sigma) \cdot b'_{i\sigma(i)} \cdot b_{1\sigma(1)} \cdots \widehat{b_{i\sigma(i)}} \cdots b_{n\sigma(n)} \tag{4.13}$$

Dabei ist σ eine Permutation und $\epsilon(\sigma)$ ihr Vorzeichen. Damit obiger Term also ungleich 0 ist, muß gelten:

$$\forall j \neq i: \quad \sigma(j) = j$$

Da σ aber eine Permutation ist, muß nun auch $\sigma(i) = i$ gelten, also auch $\epsilon(\sigma) = +1$. Es bleiben also nur die Ableitungen des Diagonalterms übrig:

$$\begin{aligned}(\det B)' &= \textstyle\sum_i b'_{ii} \cdot \lambda_1 \cdots \widehat{\lambda}_i \cdots \lambda_n \\ &= \det B \cdot \textstyle\sum_i \frac{b'_{ii}}{b_{ii}} \\ &= \det B \cdot \mathrm{spur}(B^{-1}(B')) \\ &= \det B \cdot \mathrm{spur}((B^{-1})^{\mathrm{tr}}(B') \\ &= \det B \cdot \langle B^{-1}, B' \rangle\end{aligned}$$

da für ein symmetrisches B auch B^{-1} symmetrisch ist (*Beweis:* $B \cdot B^{-1} = \mathrm{id} \implies (B^{-1})^{\mathrm{tr}} \cdot B^{\mathrm{tr}} = \mathrm{id}$).

Wie üblich gilt auch hier: Der erste und der letzte Term sind unabhängig von der Wahl der Basis, also gilt die Gleichung für beliebige Basen. ∎

In Falle der Mannigfaltigkeit M geht der Beweis analog, nur ist die Basis auch noch parallel an der betrachteten Stelle zu wählen.

Also gilt für ein Vektorfeld X:

$$\partial_X F = \langle A^{-1}, \mathrm{D}_X A \rangle \tag{4.14}$$

$$\mathrm{D}^2_{X,X} F = \langle \mathrm{D}_X(A^{-1}), \mathrm{D}_X A \rangle + \langle A^{-1}, \mathrm{D}^2_{X,X} A \rangle \tag{4.15}$$

Die Ableitung der Inversen bestimmt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}& A^{-1} \cdot A = \mathrm{id} \\ \implies & \mathrm{D}_X(A^{-1}) \cdot A + A^{-1}(\mathrm{D}_X A) = 0 \\ \implies & \mathrm{D}_X(A^{-1}) = -A^{-1}(\mathrm{D}_X A) A^{-1}\end{aligned}$$

Dies zusammen mit (4.15) ergibt an einer Stelle, an der die e_i A diagonalisieren:

$$\Delta F = \sum_i \langle -A^{-1}(\mathrm{D}_{e_i} A) A^{-1}, \mathrm{D}_{e_i} A \rangle + \sum_i \langle A^{-1}, \mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A \rangle$$

nach Lemma 2.2

$$\begin{aligned}&= \sum_{i,j,k} -\langle (\mathrm{D}_{e_i} A) A^{-1} e_j, e_k \rangle \langle A^{-1}(\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle - (S-n) \langle A, A^{-1} \rangle \\ &= \sum_{i,j,k} -\tfrac{1}{\lambda_j \lambda_k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 - n(S-n)\end{aligned}$$

und mit Formel (4.1)

$$= -\sum_{i,j,k} \tfrac{1}{\lambda_i \lambda_j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 - \tfrac{n}{S} \sum_{i,j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 \tag{4.16}$$

Zeige nun, daß $\Delta F < 0$, was den gewünschten Widerspruch liefert. Da nach Voraussetzung $S > n$ gilt, muß wegen (4.1) mindestens einer der Terme $\langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_j, e_k\rangle \neq 0$ sein. Wegen der Quadrate reicht es, zu zeigen, daß alle Koeffizienten negativ sind.

Wenn λ_i und λ_j gleiches Vorzeichen haben, dann stimmt das offenbar. Seien jetzt also $\lambda_l > 0$ und $\lambda_m < 0$ und l und m fest. Betrachte in der Summe (4.16) die Terme, in denen der Koeffizient $\frac{1}{\lambda_l \lambda_m}$ vorkommt: Davon gibt es für jedes k zwei, nämlich

$$-\frac{1}{\lambda_l \lambda_m} \cdot \Big(\langle (\mathrm{D}_{e_l} A)e_m, e_k\rangle^2 + \langle (\mathrm{D}_{e_m} A)e_l, e_k\rangle^2 \Big) = -\frac{2}{\lambda_l \lambda_m} \cdot \langle (\mathrm{D}_{e_l} A)e_m, e_k\rangle^2$$

Wegen der totalen Symmetrie von $\mathrm{D}A$ gibt es für den Term $\langle (\mathrm{D}_{e_l} A)e_m, e_k\rangle^2$ in der rechten Summe mehr Auswahlmöglichkeiten. Falls $k = l$, so gibt es *drei* Summanden: *l-m-l*, *l-l-m* und *m-l-l*. Ebenso für $k = m$.

Falls $k \neq l$ und $k \neq m$, sind rechts sogar *sechs*$(= 3\,!)$ Summanden. Zu zeigen ist also:

$$-\frac{2}{\lambda_l \lambda_m} < \frac{3n}{S} \tag{4.17}$$

Nun ist aber (4.10) eine quadratische Ungleichung in λ. Die linke Seite beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel, die für $\lambda = 0$ kleiner 0 ist. Damit gilt für die Nullstellen n_1, n_2: $n_1 < 0 < n_2$. Nach Viéta gilt: $n_1 \cdot n_2 = -\frac{2S}{3n}$.

Da λ_l und λ_k beide die Ungleichung erfüllen, muß $\lambda_l > n_2$ und $\lambda_m < n_1$ gelten, also:

$$\lambda_l \lambda_m < -\frac{2S}{3n} \tag{4.18}$$

Daraus folgt aber (4.17), also Lemma 4.3. ∎

Einsetzen von Lemma 4.3 in Lemma 4.2 ergibt:

$$\|\mathrm{D}^2 A\| \geq \frac{3S}{2} \left(1 - \frac{2S}{3n}\right)^2$$

und mit (4.2):

$$\frac{3S}{2} \left(1 - \frac{2S}{3n}\right)^2 \leq S(S-n)(S-2n-3) + 3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B}) \tag{4.19}$$

Abschließend muß noch $3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B})$ nach oben mit einem Faktor $(S - n)$ abgeschätzt werden.

Lemma 4.5 *Für die in Satz 2.5 definierten Größen* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{B}$ *gilt:*

$$3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B}) \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2} S \|\mathrm{D}A\|^2$$

also für konstantes S *mit* (4.1)*:*

$$3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B}) \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2} S^2 (S-n)$$

Beweis: Nach der Definition von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt unter Zuhilfenahme der Symmetrien durch Aufteilung der Summe:

$$\begin{aligned}
3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) &= 3\Big(\sum_{i,j,k}\lambda_i^2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2 - 2\sum_{i,j,k}\lambda_i\lambda_j\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2\Big)\\
&= \sum_{i,j,k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2+\lambda_k^2-2(\lambda_i\lambda_j+\lambda_j\lambda_k+\lambda_i\lambda_k)\right)\\
&\qquad (\leq 3S\|\mathrm{D}A\|^2 \text{ hat man schon hier erreicht})\\
&= \sum_{\substack{i,j,k\\ verschieden}}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2\left(2(\lambda_i^2+\lambda_j^2+\lambda_k^2)-(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)^2\right)\\
&\quad +3\sum_{i=j\neq k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i,e_k\rangle^2(\lambda_k^2-4\lambda_i\lambda_k)\\
&\quad +\sum_{i=j=k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i,e_i\rangle^2(-3\lambda_i^2)\\
&\leq 2S\sum_{\substack{i,j,k\\ verschieden}}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2+3\sum_{i\neq k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i,e_k\rangle^2(\lambda_k^2-4\lambda_i\lambda_k)
\end{aligned}$$

In diesem Kapitel braucht man nur den Faktor 3, wie er sich bereits aus der zweiten Zeile ergibt. Für Kapitel 6 wird dies aber nicht reichen. Dafür ist dieser Umweg über die Eigenwerte wohl notwendig.

Eine Abschätzung für $\lambda_k^2-4\lambda_i\lambda_k$ ergibt sich unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung (1.12) folgendermaßen für alle a:

$$\begin{aligned}
\lambda_k^2-4\lambda_i\lambda_k &\leq \lambda_k^2+2(\tfrac{\lambda_i^2}{a^2}+a^2\lambda_k^2)\\
&= (1+2a^2)\lambda_k^2+\tfrac{2}{a^2}\lambda_i^2
\end{aligned}$$

Die optimale Abschätzung ergibt sich, wenn die Koeffizienten gleich sind, also

$$\begin{aligned}
1+2a^2 &= \tfrac{2}{a^2}\\
\Longrightarrow a^2 &= -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{17}\\
\Longrightarrow 1+2a^2 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{17}
\end{aligned}$$

Dann gilt mit der Nebenbedingung $\sum_i\lambda_i^2=S$:

$$\lambda_k^2-4\lambda_i\lambda_k \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2}S \tag{4.20}$$

Spalte nun $\sum_{i,j,k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2=\|\mathrm{D}A\|^2$ ebenfalls in die drei Teile auf, also

$$\sum_{i,j,k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2=\sum_{\substack{i,j,k\\ verschieden}}(\ldots)+3\sum_{i=j\neq k}(\ldots)+\sum_{i=j=k}(\ldots). \tag{4.21}$$

Weil $\frac{\sqrt{17}+1}{2}>2$, schätzt man also insgesamt ab:

$$3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) \leq \frac{\sqrt{17}+1}{2}S\cdot\|\mathrm{D}A\|^2 \tag{4.22}$$

■

Mit diesem Beweis von Lemma 4.5 ist auch schon Satz 4.1 bewiesen, allerdings ohne explizite Schranke: Bei $S = n$ ist die linke Seite von (4.19) positiv, die rechte kleiner gleich Null. Wegen der Stetigkeit der Ausdrücke muß es also eine Lücke in den erlaubten Werten für S hinter n geben.

4.2 Eine explizite Schranke

Um eine solche anzugeben gilt, ohne viel zu verschenken:

$$3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B}) \leq 3S^2(S-n)$$

Zusammen mit (4.19) folgt:

$$\frac{3}{2}S\left(1-\frac{2S}{3n}\right)^2 \leq S(S-n)(S-2n-3)+3S^2(S-n) \tag{4.23}$$

oder

$$\frac{3}{2}\left(1-\frac{2S}{3n}\right)^2 \leq (S-n)(4S-2n-3). \tag{4.24}$$

Für $S = n$ ist diese Gleichung offensichtlich falsch. Setze nun

$$S = n + \delta.$$

Gesucht ist also ein δ, für das die Ungleichung *weiterhin* falsch ist. Auf der linken Seite steht dann:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\left(1-\frac{2n+2\delta}{3n}\right)^2 &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2\delta}{3n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}-\frac{2\delta}{3n}+\frac{2\delta^2}{3n^2}\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite:

$$\delta(4n+4\delta-2n-3) = 2n\delta+4\delta^2-3\delta$$

Also ist die Behaupung: $\exists\delta(n) > 0$:

$$\frac{1}{6}-\frac{2\delta}{3n}+\frac{2\delta^2}{3n^2} \geq 2n\delta+4\delta^2-3\delta \tag{4.25}$$

Man sieht schon, daß ein konstantes δ oder eines, das mit einer positiven Potenz von n wächst, niemals Lösung von (4.25) sein kann. Mache also den Ansatz $\delta = \frac{K}{n}$:

$$(\tfrac{1}{6}-2K)+3\tfrac{K}{n}-\tfrac{2K}{3n^2}+\tfrac{2K^2}{3n^4}-4\tfrac{K^2}{n^2} \geq 0$$

Der geklammerte Term legt nahe, $K = \frac{1}{12}$ zu wählen. Die verbleibenden Terme bis auf $\frac{2K^2}{3n^4}$ ergeben dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n}-\frac{1}{18n^2}-\frac{1}{36n^2} &= \frac{1}{36n^2}(9n-3) \\ &\geq 0 \qquad \text{da } n \geq 3\end{aligned}$$

Also kann ein S mit $S - n < \frac{1}{12n}$ nicht Lösung der Ungleichung (4.25) sein. Damit ist Satz 4.1 bewiesen. ■

Kapitel 5

Der dreidimensionale Fall

In diesem Kapitel wird nach [10] Cherns Vermutung für $n = 3$ bewiesen.

Satz 5.1 (Peng,Terng) *M sei dreidimensionale, kompakte, minimale Hyperflächenimmersion in der S^4. S, das Quadrat der Norm der Weingartenabbildung, sei konstant. Falls S größer ist als 3, so gilt $S \geq 6$.*

Beweis: Der Beweis macht Gebrauch von Eigenschaften der symmetrischen Funktionen in drei Dimensionen.

Ich zitiere hier noch einmal die Ergebnisse aus Lemma 2.6:

$$\Delta\langle A^3, \mathrm{id}\rangle = 3\Big((n-S)\langle A^3, \mathrm{id}\rangle + 2\sum\nolimits_i \langle (D_{e_i}A)^2, A\rangle\Big) \tag{5.1}$$

$$\Delta\langle A^4, \mathrm{id}\rangle = 4\Big((n-S)\langle A^4, \mathrm{id}\rangle + 2\mathcal{A} + \mathcal{B}\Big) \tag{5.2}$$

Hier gilt natürlich $n = 3$. Die erste Besonderheit für diesen Fall ist

$$\langle A^4, \mathrm{id}\rangle = \tfrac{1}{2}S^2. \tag{5.3}$$

Beweis: λ_1, λ_2 und λ_3 bezeichne die drei Hauptkrümmungen. Setze $a = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & S + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = 0 \\ \Longrightarrow\ & S^2 = 4\Big(a + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Big) = 4a \end{aligned}$$

und durch einfaches ausmultiplizieren von $S^2 = (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2$

$$S^2 = \langle A^4, \mathrm{id}\rangle + 2a,$$

also die Behauptung (5.3). ∎

Insbesondere ist $\langle A^4, \mathrm{id}\rangle$ also auch konstant. Mit (5.2) folgt:

$$2\mathcal{A} + \mathcal{B} = \tfrac{1}{2}S^2(S-3). \tag{5.4}$$

Und so wird aus (4.2):

Lemma 5.2 *Die Norm der zweiten Ableitung von A erfüllt*

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \leq 3S(S-3)^2.$$

Beweis: Da nach Lemma 2.7 $\mathcal{A} + 2\mathcal{B} \geq 0$, folgt:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}^2 A\|^2 &= S(S-3)(S-9) + 3(\mathcal{A} - 2\mathcal{B}) \\ &= S(S-3)(S-9) + 4(2\mathcal{A} + \mathcal{B}) - 5(\mathcal{A} + 2\mathcal{B}) \\ &= 3S(S-3)^2 - 5(\mathcal{A} + 2\mathcal{B}) \\ &\leq 3S(S-3)^2\end{aligned}$$

■

Nach den vierten Potenzen der Hauptkrümmungen wende ich mich nun den dritten zu.

Lemma 5.3 *Für* $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ *gilt:*

- $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ *ist konstant genau dann, wenn die Hauptkrümmungen konstant sind.*
- $-\sqrt{\frac{S^3}{6}} \leq \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \leq \sqrt{\frac{S^3}{6}}$ *und Gleichheit herrscht nur, wenn zwei Hauptkrümmungen gleich sind.*

Beweis: Zum ersten Punkt ist nur die eine Richtung zu zeigen. Aber die drei Gleichungen $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = S$ und $a^3 + b^3 + c^3 = k$ lassen nur eine diskrete Lösungsmenge zu. Damit muß $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ konstant sein.

Für die zweite Aussage sucht man die Extrema von $a^3 + b^3 + c^3$ unter den Nebenbedingungen $a + b + c = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 = S$. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && 3a^2 - 2at - u = 0 \\
&\text{(II)} && 3b^2 - 2bt - u = 0 \\
&\text{(III)} && 3c^2 - 2ct - u = 0 \\
&\text{(IV)} && a^2 + b^2 + c^2 = S \\
&\text{(V)} && a + b + c = 0
\end{aligned}$$

Falls $a = 0$, so gilt $b = -c$, also $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle = 0$. Da $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ das Vorzeichen wechseln kann, handelt es sich offenbar nicht um einen Extremalpunkt.

Falls $b = c$, so gilt $a = -2b$ und somit $a^3 + b^3 + c^3 = -6b^3$. Mit $S = 6b^2$ folgt $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle = \pm\sqrt{S^3/6}$, also die gesuchten Extrema.

Setze jetzt voraus, daß $a, b, c \neq 0$ gilt. Dann gilt wegen der Minimalität auch $a \neq -b$ usw.

$\sum(I) - (III)$ ergibt: $3S = 3u \implies u = S$. (I) impliziert dann

$$t = \frac{3a^2 - S}{2a}.$$

Eingesetzt in (II) und (III) folgt

$$6ab^2 - 6a^2b + 2bS = 2aS$$
$$6ac^2 - 6a^2c + 2cS = 2aS$$

Die Differenz dieser Zeilen liefert: Ein kritischer Punkt erfüllt

$$3a(b^2 - c^2) - 3a^2(b - c) + S(b - c) = 0.$$

$b = c$ ist also ein kritischer Punkt. Falls $b \neq c$, so teilt man durch $(b - c)$ und erhält:

$$3a(b + c) - 3a^2 + S = 0$$
$$\Longrightarrow\ a^2 = \frac{S}{6}$$

Wegen der Symmetrie der Bedingungen kann man die gleichen Forderungen nun an permutierte a, b, c stellen. Dann muß entweder $a = b$ gelten *oder* $c^2 = S/6$, also ($a = b$ oder $a = c$). Damit ist aber klar, daß die Extrema die im Lemma genannten sind. ∎

Dieses Lemma erledigt schon mal den Fall, daß $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ konstant ist. In diesem Fall handelt es sich also um eine isoparametrische Hyperfläche, und nach Satz 3.3 kann S dann nur die Werte $0, 3$ oder 6 annehmen (weil ja höchstens drei verschiedene Eigenwerte auftauchen). Man darf also $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \neq \mathit{konst}$ voraussetzen.

Lemma 5.4 *Falls $S > 3$ und $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \neq$ konst, dann gibt es einen Punkt p auf M, so daß*

$$\langle A^3, \mathrm{id}\rangle_p = 0.$$

Beweis (per Widerspruch): Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle > 0$ auf der ganzen Fläche. Führe die folgenden Berechnungen an einem Minimalpunkt q von $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ durch. Offenbar gilt

$$\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \geq \langle A^3, \mathrm{id}\rangle_q > 0.$$

An dieser Stelle müssen die Hauptkrümmungen λ_1, λ_2 und λ_3 verschieden sein. Sonst wäre nach Lemma 5.3 $\min\langle A^3, \mathrm{id}\rangle = \max\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ und somit $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wegen der Minimalität gilt

$$\nabla\langle A^3, \mathrm{id}\rangle = 0 \tag{5.5}$$
$$\Delta\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \geq 0 \tag{5.6}$$

Man kann jetzt ein Gleichungssystem aufsetzten. Aus (5.5) folgt:

$$3\langle \mathrm{D}_X A, A^2\rangle = 0 = 3\sum_i \lambda_i^2 \langle (\mathrm{D}_X A)e_i, e_i\rangle \tag{5.7}$$

Mit $\langle A, \mathrm{id}\rangle = 0$ und $\langle A, A\rangle = \mathit{konst}$ folgen die Gleichungen:

$$\sum_i \langle (\mathrm{D}_X A)e_i, e_i\rangle = 0 \tag{5.8}$$

$$\sum_i \lambda_i \langle (\mathrm{D}_X A) e_i, e_i \rangle = 0 \tag{5.9}$$

Wenn man nun noch in X wieder die Orthonormalbasis e_j für $j = 1, 2, 3$ einsetzt, so bekommt man aus (5.7),(5.8) und (5.9) ein Gleichungssystem in $\langle (\mathrm{D}_{e_j} A) e_i, e_i \rangle$ mit Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{(da die } \lambda_i \text{ verschieden sind)}$$

Damit bleibt nur die triviale Lösung, also

$$\langle (\mathrm{D}_{e_j} A) e_i, e_i \rangle = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{5.10}$$

(5.6) liefert aber mit (5.1):

$$2 \sum_{i,j,k} \lambda_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 \geq (S-3) \langle A^3, \mathrm{id} \rangle > 0 \tag{5.11}$$

Dies kann aber nicht sein, da

$$\begin{aligned} 3 \sum_{i,j,k} \lambda_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 &= \sum_{i,j,k} (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k) \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 \\ &= \sum_{i \neq j \neq k \neq i} (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k) \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k \rangle^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Betrachte nun den Punkt p, an dem $\langle A^3, \mathrm{id} \rangle = 0$ gilt, genauer. Ich wähle eine Basis, die die Weingartenabbildung dort mit wachsenden Eigenwerten diagonalisiert, und halte sie für den Rest dieses Kapitels fest. Die folgenden Formeln geben natürlich nur für diese gewählte Basis Sinn, man kommt um diese explizite Wahl aber nicht herum.

Lemma 5.5 *An der Stelle p mit $\langle A^3, \mathrm{id} \rangle_p = 0$ gilt für die gewählte Basis:*

$$\lambda_1 = -\sqrt{\tfrac{S}{2}}, \quad \lambda_2 = 0 \quad \textit{und } \lambda_3 = \sqrt{\tfrac{S}{2}} \tag{5.12}$$

$$\|\mathrm{D}_{e_2} A\|^2 \geq \tfrac{1}{3} S(S-3) \tag{5.13}$$

Beweis: Wegen der Minimalität gilt $\lambda_3^3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)^3$, also folgt bei p:

$$\begin{aligned} & \lambda_1^3 + \lambda_2^3 = (\lambda_1 + \lambda_2)^3 \\ \Longrightarrow \quad & \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Also muß ein Faktor 0 sein, damit ist (5.12) klar.

Die Formeln (5.8) und (5.9) bekommen nun ein ganz explizite Bedeutung, da nun ja die λ_i bekannt sind. Aus (5.9) folgt:

$$\begin{aligned}\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_1,e_1\rangle &= \langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_3,e_3\rangle\\ \langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_1,e_1\rangle &= \langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_3,e_3\rangle\\ \langle(\mathrm{D}_{e_3}A)e_1,e_1\rangle &= \langle(\mathrm{D}_{e_3}A)e_3,e_3\rangle\end{aligned} \tag{5.14}$$

(5.8) impliziert nun mit Hilfe von (5.14):

$$\begin{aligned}2\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_1,e_1\rangle &= -\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_2,e_2\rangle\\ 2\langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_1,e_1\rangle &= -\langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_2,e_2\rangle\\ 2\langle(\mathrm{D}_{e_3}A)e_1,e_1\rangle &= -\langle(\mathrm{D}_{e_3}A)e_2,e_2\rangle\end{aligned} \tag{5.15}$$

Man kann nun mit diesen beiden Systemen alle Ausdrücke vom Typ $\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_j\rangle$ $(i\neq j)$ durch $\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i,e_i\rangle$ ausdrücken. Wenn man jetzt die Summe über alle $\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2$ bildet, so muß nur noch beachtet werden, daß der Term $\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_2,e_3\rangle$ *sechsmal* auftaucht, die Terme vom Typ $\langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_1,e_1\rangle$ *dreimal* und die Diagonalelemente $\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i,e_i\rangle$ *einmal*. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}A\|^2 &= \sum_{i,j,k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2\\ &= \underbrace{6\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_2,e_3\rangle^2}_{123}+\underbrace{16\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_1,e_1\rangle^2}_{111,133,122}+\underbrace{\tfrac{5}{2}\langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_2,e_2\rangle^2}_{222,211,233}+\underbrace{16\langle(\mathrm{D}_{e_3}A)e_3,e_3\rangle^2}_{333,311,322}\\ &= S(S-3)\end{aligned}$$

Um nun (5.13) zu beweisen, spaltet man $\|\mathrm{D}_{e_2}A\|^2$ ebenso auf und bringe alles auf Diagonalgestalt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{D}_{e_2}A\|^2 &= \sum_{i,j}\langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_i,e_j\rangle^2\\ &= \underbrace{2\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_2,e_3\rangle^2}_{13}+\underbrace{8\langle(\mathrm{D}_{e_1}A)e_1,e_1\rangle^2}_{12}+\underbrace{\tfrac{3}{2}\langle(\mathrm{D}_{e_2}A)e_2,e_2\rangle^2}_{22,11}+\underbrace{8\langle(\mathrm{D}_{e_3}A)e_3,e_3\rangle^2}_{23}\\ &\geq \tfrac{1}{3}\|\mathrm{D}A\|^2\end{aligned}$$

■

Für die endgültige Abschätzung betrachtet man Lemma 4.2 auf Seite 27 genauer. Aus dem Beweis folgt, daß sogar

$$\|\mathrm{D}^2A\|^2 \geq 3\sum_{i,j\neq i}V(e_i,e_j)^2+\tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}S^3-2S^2+3S) \tag{5.16}$$

gilt, wobei hier noch die Darstellung für $\langle A^4,\mathrm{id}\rangle$ nach (5.3) eingesetzt wurde. $V(X,Y)$ bezeichnet dabei den *symmetrischen* Teil von $U(X,Y)=\langle(\mathrm{D}^2_{Y,X}A)X,Y\rangle$; $T(X,Y)$ ist der *schiefe*.

Zusammen mit Lemma 5.2 folgt

$$3S(S-3)^2 \geq 3\sum_{i,j\neq i}V(e_i,e_j)^2+\tfrac{3}{4}S(S^2-4S+6). \tag{5.17}$$

Der erste Term wurde in Kapitel 4 weggelassen, für diese bessere Abschätzung ist er hier unerläßlich. Nach (4.6) berechnet man:

$$T(e_1,e_2) = T(e_2,e_3) = -\sqrt{\tfrac{S}{2}} \tag{5.18}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\neq i} V(e_i,e_j)^2 &\geq 2\Big[V(e_1,e_2)^2 + V(e_2,e_3)^2\Big]\\ &= 2\Big[\Big(U(e_1,e_2) - \tfrac{1}{2}T(e_1,e_2)\Big)^2 + \Big(U(e_2,e_3) - \tfrac{1}{2}T(e_2,e_3)\Big)^2\Big]\\ &= \Big[U(e_1,e_2) + U(e_2,e_3) + \sqrt{\tfrac{S}{2}}\Big]^2 + \Big[U(e_1,e_2) - U(e_2,e_3)\Big]^2\\ &\geq \Big(U(e_1,e_2) - U(e_2,e_3)\Big)^2\end{aligned}$$

Nach der Ableitungsregel (1.23) gilt

$$\langle \mathrm{D}^2_{X,X}A, A\rangle + \|\mathrm{D}_X A\|^2 = 0, \tag{5.19}$$

also mit den nun bekannten Eigenwerten von A:

$$\sqrt{\tfrac{S}{2}}\Big(\langle(\mathrm{D}^2_{X,X}A)e_1,e_1\rangle - \langle(\mathrm{D}^2_{X,X}A)e_3,e_3\rangle\Big) = \|\mathrm{D}_X A\|^2. \tag{5.20}$$

Insbesondere gilt

$$\sqrt{\tfrac{S}{2}}(\langle(\mathrm{D}^2_{e_2,e_2}A)e_1,e_1\rangle - \langle(\mathrm{D}^2_{e_2,e_2}A)e_3,e_3\rangle) = \|\mathrm{D}_{e_2} A\|^2. \tag{5.21}$$

Bringe dies nun in Verbindung mit obiger Rechnung. Dazu gilt:

$$\begin{aligned}U(e_1,e_2) - U(e_2,e_3) &= \langle(\mathrm{D}^2_{e_2,e_1}A)e_1,e_2\rangle - \langle(\mathrm{D}^2_{e_3,e_2}A)e_2,e_3\rangle\\ &= \langle(\mathrm{D}^2_{e_2,e_2}A)e_1,e_1\rangle - \langle(\mathrm{D}^2_{e_2,e_2}A)e_3,e_3\rangle - T(e_2,e_3)\\ &= \sqrt{\tfrac{2}{S}}\|\mathrm{D}_{e_2}A\|^2 + \sqrt{\tfrac{S}{2}}\\ &\geq \sqrt{\tfrac{2}{S}}\Big(\tfrac{1}{3}S(S-3) + \tfrac{S}{2}\Big)\end{aligned}$$

Zusammen mit (5.17) folgt daher:

$$\begin{aligned}& 3S(S-3)^2 \geq 3\tfrac{2}{S}\left(\tfrac{2S^2-3S}{6}\right)^2 + \tfrac{3}{4}S(S^2-4S+6)\\ \Longrightarrow\quad & 36(S-3)^2 \geq 2(2S-3)^2 + 9(S^2-4S+6)\\ \Longrightarrow\quad & 19S^2 - 156S + 252 \geq 0\\ \Longrightarrow\quad & (S-6)(19S-42) \geq 0\end{aligned}$$

Damit ist klar: Falls $S > 3$, so muß $S \geq 6$ gelten. ∎

Kapitel 6

Variables S

In diesem Kapitel wird eine Schranke für nicht-konstantes S angegeben. Diese Rechnungen folgen [11]. Die Vorarbeiten der letzten Kapitel machen den Beweis recht einfach. Zu zeigen ist:

Satz 6.1 (Peng,Terng) *M sei eine geschlossene, minimale Hyperflächenimmersion in der S^{n+1} und $n \leq 5$. Dann existiert ein $\delta(n)$, so daß $n \leq S \leq S + \delta$ impliziert $S = n$.*

Da schon im Beweis für die Lücke zwischen 0 und n die Integration herangezogen wurde, soll diese Technik auch hier angewendet werden, da man viele der Abschätzungen aus dem letzten Kapitel nun nicht mehr verwenden kann.

Mit Hilfe des Satzes von Stokes beweist man den folgenden

Satz 6.2 *B sei ein Endomorphismus auf der kompakten Mannigfaltigkeit M, f eine glatte Funktion und e_i, wie üblich, in p parallele Orthonormalbasis. Dann gilt:*

$$\int_M \sum_{i,j} \langle Be_i, e_j \rangle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j} f = -\int_M \sum_j \langle (\mathrm{D}_{e_j} B) e_j, \nabla f \rangle, \tag{6.1}$$

wobei $\nabla f = \sum_j (\partial_{e_j} f) e_j$ ist.

Beweis:

Sei ω die folgende $(n-1)$-Form auf M:

$$\omega := \sum_i (-1)^{i+1} \langle Be_i, \nabla f \rangle \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}e_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_n$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_i \partial_{e_i} \Big(\langle Be_i, \nabla f \rangle \Big) (-1)^{i+1} \mathrm{d}e_i \wedge \mathrm{d}e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}e_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}e_n \\ &= \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} B) e_i, \nabla f \rangle \, \mathrm{dvol} + \sum_{i,j} \langle Be_i, \mathrm{D}^2_{e_i,e_j} f \cdot e_j \rangle \, \mathrm{dvol}. \end{aligned}$$

Mit Stokes gilt $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$, also Satz 6.2. ∎

Fall $B = A$, so folgt sogar mit (1.21):

$$\sum_j \langle (D_{e_j} A) e_j, \nabla f \rangle = 0. \tag{6.2}$$

Wähle nun noch $f = \langle A^3, \mathrm{id} \rangle = \langle A^2, A \rangle$. Nach Lemma 2.6 gilt:

$$\tfrac{1}{3} \mathrm{D}^2_{X,X} f = \langle D^2_{X,X} A, A^2 \rangle + 2 \langle (\mathrm{D}_X A), (\mathrm{D}_X A) A \rangle \tag{6.3}$$

Man nimmt nun für die folgenden Rechnungen wieder wie üblich an, daß A bei der betrachteten Stelle diagonalisiert ist. Ich erinnere an den Vertauschungsterm der 2. Ableitung von A nach (4.6) und an die zweite Ableitung von S nach (2.10):

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3} \sum_{i,j} \langle A e_i, e_j \rangle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j} f &= \tfrac{1}{3} \sum_j \lambda_j \mathrm{D}^2_{e_j,e_j} f \\
&= \sum_{i,j} \lambda_j \langle \mathrm{D}^2_{e_j,e_j} A e_i, A^2 e_i \rangle + 2 \sum_{i,j} \lambda_j \langle (\mathrm{D}_{e_j} A) e_i, (\mathrm{D}_{e_j} A) A e_i \rangle \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i^2 \lambda_j \langle \mathrm{D}^2_{e_j,e_j} A e_i, e_i \rangle + 2 \sum_{i,j} \lambda_j \lambda_i \| \mathrm{D}_{e_j} A e_i \|^2 \\
&\overset{(4.6)}{=} \sum_{i,j} \lambda_i^2 \lambda_j \left(\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A e_j, e_j \rangle + (\lambda_i - \lambda_j)(1 + \lambda_i \lambda_j) \right) + 2\mathcal{B} \\
&= \sum_i \lambda_i^2 \langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_i} A, A \rangle - S^2 + S \langle A^4, \mathrm{id} \rangle - \langle A^3, \mathrm{id} \rangle^2 + 2\mathcal{B} \\
&\overset{(2.10)}{=} \sum_i \lambda_i^2 \left(\tfrac{1}{2} \mathrm{D}^2_{e_i,e_i} S - \| \mathrm{D}_{e_i} A \|^2 \right) - S^2 + S \langle A^4, \mathrm{id} \rangle - \langle A^3, \mathrm{id} \rangle^2 + 2\mathcal{B} \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \langle A^2 e_i, e_j \rangle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j} S - S^2 + S \langle A^4, \mathrm{id} \rangle - \langle A^3, \mathrm{id} \rangle^2 - (\mathcal{A} - 2\mathcal{B})
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Wende nun Satz 6.2 zweimal an, zunächst auf den ersten Term der letzten Zeile. Dazu wird ∇S benötigt. Nach (1.24) gilt

$$\nabla S = 2 \sum_i (\mathrm{D}_{e_i} A) A e_i. \tag{6.5}$$

Integration über den ersten Term der letzten Zeile obiger Rechnung liefert:

$$\begin{aligned}
\int_M \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \langle A^2 e_i, e_j \rangle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j} S &= - \int_M \tfrac{1}{2} \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A^2) e_i, \nabla S \rangle \\
&= - \int_M \tfrac{1}{2} \sum_i \Big(\langle (\mathrm{D}_{e_i} A) A e_i, \nabla S \rangle + \langle A (\mathrm{D}_{e_i} A) e_i, \nabla S \rangle \Big) \\
&\overset{(6.5)}{=} - \int_M \tfrac{1}{4} \| \nabla S \|^2 + \underbrace{\langle \mathrm{D}_{A \nabla S} A, \mathrm{id} \rangle}_{=0}
\end{aligned}$$

Wenn nun noch beide Seiten der Gleichungskette (6.4) integriert werden und man beachtet, daß die linke Seite wegen (6.2) verschwindet, so bleibt:

Lemma 6.3

$$\int_M \mathcal{A} - 2\mathcal{B} = \int_M S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - S^2 - \tfrac{1}{4}\|\nabla S\|^2 \tag{6.6}$$

Integriert man die Gleichungen aus den Sätzen 2.3 und 2.5 (Seiten 15 und 17), dann fallen die Terme mit dem Laplace weg und es bleibt:

$$\int_M S(S-n) = \int_M \|\mathrm{D}A\|^2 \tag{6.7}$$

und

$$\begin{aligned}\int_M (S-2n-3)\|\mathrm{D}A\|^2 + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) + \tfrac{3}{2}\|\nabla S\|^2 \\ &= \int_M \|\mathrm{D}^2 A\|^2 \qquad \text{und mit Lemma 4.2:} \\ &\geq \int_M \tfrac{3}{2}\Big(S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - S^2 - S(S-n)\Big) \\ &= \int_M \tfrac{3}{2}(S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - S^2) - \tfrac{3}{2}\|\mathrm{D}A\|^2 \\ &= \int_M \tfrac{3}{2}(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) + \tfrac{3}{8}\|\nabla S\|^2 - \tfrac{3}{2}\|\mathrm{D}A\|^2 \qquad \text{wegen (6.6).}\end{aligned} \tag{6.8}$$

Also ergibt sich

$$\int_M (S-2n-\tfrac{3}{2})\|\mathrm{D}A\|^2 + \tfrac{3}{2}(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) + \tfrac{9}{8}\|\nabla S\|^2 \geq 0. \tag{6.9}$$

Um die Abschätzung zu beenden, muß der Term $\|\nabla S\|^2$ noch verschwinden. Dazu nimmt man wieder die Darstellung von ΔS aus Satz 2.3, multipliziert mit S und integriert. Mit dem Satz von Green ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_M S^2(n-S) + S\|\mathrm{D}A\|^2 &= \tfrac{1}{2}\int_M S\Delta S \\ &= -\tfrac{1}{2}\int_M \|\nabla S\|^2\end{aligned}$$

Zusammen ergeben diese Gleichungen mit der Abschätzung aus Lemma 4.5 von Seite 32 zu $(\mathcal{A}-2\mathcal{B})$:

$$0 \leq \int_M (S-2n-\tfrac{3}{2})\|\mathrm{D}A\|^2 + \frac{\sqrt{17}+1}{4}S\|\mathrm{D}A\|^2 + \frac{9}{4}\Big(S^2(S-n) - S\|\mathrm{D}A\|^2\Big)$$

Versuche nun, den Term $\|\mathrm{D}A\|^2$ auszuklammern. Mit (6.7) folgt für $n \leq S < n+\delta$:

$$\int_M S^2(S-n) \leq (n+\delta)\int_M S(S-n) = (n+\delta)\int_M \|\mathrm{D}A\|^2$$

Damit ergibt sich

$$0 \leq \int_M \Big[(\sqrt{17}-4)S - (6-n-9\delta)\Big]\frac{\|\mathrm{D}A\|^2}{4}$$

Ziel ist nun, die eckige Klammer negativ zu machen. Da nach Voraussetzung $S < n + \delta$, braucht man dafür:

$$\begin{aligned}(\sqrt{17} - 4)(n + \delta) &\leq 6 - n - 9\delta \\ \delta &\leq \frac{6 - (\sqrt{17} - 3)n}{\sqrt{17} + 5} \quad =: \quad K_n\end{aligned}$$

Falls $n \leq 5$, so ist K_n positiv. Mit $\delta \leq K_n$ ist also der Integrand kleiner gleich 0, also $\|\mathrm{D}A\|^2 = 0$. Dies ist aber wegen (6.7) äquivalent zu $S = n$. Damit ist Satz 6.1 bewiesen. ∎

Anmerkung: Die Abschätzung ist nicht sehr gut, wenn man im Kopf hat, daß eigentlich $K_n = n$ das Ziel ist. Man erreicht so folgende Werte:

	K_n
$n = 2$	0.411
$n = 3$	0.288
$n = 4$	0.165
$n = 5$	0.042

Die Lücke läßt sich noch etwas vergrößern, da man die Abschätzung von $(\mathcal{A} - 2\mathcal{B})$ unter Ausnützung der Nebenbedingung $\sum_i \lambda_i = 0$ für festes n noch etwas besser machen kann, es bleibt aber ein gradueller Erfolg.

Kapitel 7

Die Ansätze von Yang und Cheng

In diesem Kapitel wird nach [17] ein Satz gezeigt, der die Abschätzung bei konstantem S noch etwas verbessert. In dem gleichen Artikel zeigen sie noch einen Satz, der eine weitere Verschärfung darstellt. Der Satz im nächsten Kapitel verbessert aber beide Abschätzungen, darum führe ich den zweiten Beweis nicht mehr aus. Der folgende Satz hingegen wird für den Beweis im nächsten Kapitel benötigt.

Satz 7.1 (Yang,Cheng) *Sei M geschlossene minimale Hyperflächenimmersion in die S^{n+1} mit konstanter Spur der Riccikrümmung und $n > 3$. Dann gilt, falls $S > n$:*

$$S > \begin{cases} n + \frac{1}{5}n & \text{falls } n > 7 \\ n + \frac{2}{7}n - \frac{9}{14} & \text{falls } 3 < n \leq 7. \end{cases}$$

Ich stütze mich auf die Gleichungen aus den Kapiteln 2 und 4. Zu den dort definierten Ausdrücken sind folgende Funktionen im Folgenden zentral:

Definition 7.1

$$f := S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - 2S^2 + nS \tag{7.1}$$

$$g := \langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \frac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - \frac{S^2}{n} \tag{7.2}$$

$$\alpha := \frac{\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_i, e_i\rangle^2}{\sum_{i,j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)e_j, e_k\rangle^2} \tag{7.3}$$

$$t := \frac{S - n}{S} \tag{7.4}$$

Anmerkung: Zu diesen Definitionen ist folgendes zu bemerken:

1. Nach (4.4) gilt auch

   $$f = \tfrac{1}{S}\sum_i (S\lambda_i^2 - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle\lambda_i - S)^2. \tag{7.5}$$

   Wie schon in Kapitel 4 ist dieser Term zentral.

2. $f/S = g + (S-n)^2/n$.

3. In den folgenden Rechnungen tauchen wiederholt Teilsummen von $\sum_i \|\mathrm{D}_{e_i} A\|^2$ auf. Dieser Tatsache wird durch das Einführen der Konstanten α Rechnung getragen, über die man solche Terme ausdrücken kann (wie schon in der Definition). Man kann die folgenden Rechnungen etwas vereinfachen, wenn man α wegläßt, erhält dann aber eine schwächere Aussage (aber immer noch besser als in Kapitel 4).

   Offenbar gilt $0 \leq \alpha \leq 1$.

4. Mit $tS = (S-n)$ folgt die Darstellung $\frac{S}{n} = \frac{1}{1-t}$.

Zunächst werden einige Lemmas gezeigt, die zu dem Beweis von dem Satz führen werden.

Lemma 7.2 *Für jedes (feste) $c \in \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $x_c \in M$, so daß dort gilt:*

$$(7.6)\quad (S-n)\left(\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - cS\langle A^4, \mathrm{id}\rangle\right) = 2\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)^2, A\rangle - cS(2\mathcal{A} + \mathcal{B}) + 3\sum_i \langle \mathrm{D}_{e_i} A, A^2\rangle^2.$$

Beweis: Definiere die Funktion

$$F := \tfrac{1}{4} cS\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \tfrac{1}{6}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2$$

Dann gilt, wie üblich, $\int_M \Delta F = 0$. Ich erinnere noch einmal an Lemma 2.6. Danach gilt:

$$\tfrac{1}{4}\Delta(\langle A^2, A^2\rangle) = -(S-n)\langle A^4, \mathrm{id}\rangle + 2\mathcal{A} + \mathcal{B}$$

Ebenso wie in dem Beweis gilt für $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2$:

$$\begin{aligned}
\partial_X \left(\langle A^2, A\rangle^2\right) &= 2\langle A^2, A\rangle \left(3\langle (\mathrm{D}_X A), A^2\rangle\right) \\
\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2_{X,X}\left(\langle A^2, A\rangle^2\right) &= 3\langle D_X A, A^2\rangle^2 + \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \left(\langle \mathrm{D}^2_{X,X} A, A^2\rangle + 2\langle (\mathrm{D}_X A)^2, A\rangle\right) \\
\Longrightarrow\ \tfrac{1}{6}\Delta\left(\langle A^2, A\rangle^2\right) &= 3\sum_i \langle D_{e_i} A, A^2\rangle^2 - (S-n)\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 + 2\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)^2, A\rangle\langle A^3, \mathrm{id}\rangle
\end{aligned}$$

Weil das Integral über $\Delta F = 0$ ist, muß es auch einen Punkt geben, wo $\Delta F = 0$ gilt. ∎

Dieses Lemma ist der Ausgangspunkt für die Rechnungen. In ihm wurden zwei neue Terme eingeführt, über die noch nicht viel bekannt ist. Daher folgen nun zwei Lemmas, die diese Terme abschätzen.

Die folgenden Rechnungen werden alle an dem Punkt x_c ausgeführt. Es werden dabei keine weiteren Eigenschaften dieser Stelle benutzt, ich will aber (wie üblich) vereinbaren, daß die Basis dort parallel ist und A diagonalisiert.

Lemma 7.3 *Es gilt:*

$$\Big(\sum_i 2\langle A,(\mathrm{D}_{e_i}A)^2\rangle\Big)^2 \le \Big(\tfrac{4}{3}(\mathcal{A}+2\mathcal{B}) - \tfrac{16}{3}\sum_j \frac{1}{S+2\lambda_j^2}\langle D_{e_j}A, A^2\rangle^2\Big)S(S-n)$$
$$\le \Big(\tfrac{4}{3}(\mathcal{A}+2\mathcal{B}) - \tfrac{16}{9S}\sum_j \langle D_{e_j}A, A^2\rangle^2\Big)S(S-n)$$

Beweis: Leider müssen die impliziten Summen in den Skalarprodukten aufgelöst werden. y_k sei beliebiger Vektor, gilt:

$$\sum_{i,j,k} y_k\langle Ae_i,e_j\rangle\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle = \sum_k y_k\langle \mathrm{D}_{e_k}A, A\rangle = 0 \tag{7.7}$$

Ebenso gilt natürlich:

$$\sum_{i,j,k} \lambda_k y_k\langle Ae_i,e_j\rangle\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle = \sum_k \lambda_k y_k\langle \mathrm{D}_{e_k}A, A\rangle = 0 \tag{7.8}$$

Nach Lemma 2.7 gilt ferner $3(\mathcal{A}+2\mathcal{B}) = \sum_{i,j,k}(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)^2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2$. Zeige nun also:

$$\Big(\sum_i 2\langle A,(\mathrm{D}_{e_i}A)^2\rangle\Big)^2 = \Big(\sum_{i,j,k} 2\lambda_j\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2\Big)^2$$
$$\overset{(7.7)}{=} \frac{4}{9}\Big(\sum_{i,j,k}\Big[(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle$$
$$- (y_i\langle Ae_j,e_k\rangle + y_j\langle Ae_k,e_i\rangle + y_k\langle Ae_i,e_j\rangle)\Big]\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle\Big)^2$$
$$\le \frac{4}{9}\sum_{i,j,k}\Big[(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k)\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle$$
$$- (y_i\langle Ae_j,e_k\rangle + y_j\langle Ae_k,e_i\rangle + y_k\langle Ae_i,e_j\rangle)\Big]^2\sum_{i,j,k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle^2$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{4}{9}\Big(3(\mathcal{A}+2\mathcal{B}) - 12\sum_{i,k} y_k\lambda_i^2\langle(\mathrm{D}_{e_k}A)e_i,e_i\rangle$$
$$+ 3\sum_k (S+2\lambda_k^2)y_k^2\Big)S(S-n),$$

wobei $(*)$ aus Lemma 2.7 und aus (7.8) folgt.

Wenn man $y_k = 2\sum_j\langle(\mathrm{D}_{e_k}A)e_i, A^2e_j\rangle/(S+2\lambda_k^2)$ setzt, so folgt die Behauptung. ∎

Lemma 7.4 *Bei x_c gilt:*

$$\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A), A^2\rangle^2 \le \frac{1+2\alpha}{3}S(S-n)g \tag{7.9}$$
$$= \frac{1+2\alpha}{3}\left[f(S-n) - \tfrac{S}{n}(S-n)^3\right]$$

Beweis: Weil $\langle \mathrm{D}_X A, A\rangle = 0$ und $\langle \mathrm{D}_X A, \mathrm{id}\rangle = 0$, gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A), A^2\rangle^2 &= \sum_i \Big(\sum_j \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, (A^2 - aA - b\cdot\mathrm{id}) e_j\rangle \Big)^2 \\
&= \sum_i \Big(\sum_{j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k\rangle \langle e_k, (A^2 - aA - b\cdot\mathrm{id}) e_j\rangle \Big)^2 \\
&= \sum_i \Big(\sum_{j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_j\rangle \langle e_j, (A^2 - aA - b\cdot\mathrm{id}) e_j\rangle \Big)^2 \\
&\le \sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_j\rangle^2 \cdot \sum_i \langle (A^2 - aA - b\cdot\mathrm{id}) e_i, e_i\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_j\rangle^2 \cdot \sum_i (\lambda_i^2 - a\lambda_i - b)^2 \qquad (7.10)
\end{aligned}$$

Drücke nun den Term $\sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_j\rangle^2$ durch α und S aus. Man spaltet daher wie gehabt auf:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k\rangle^2 &= S(S-n) \\
&= \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_i, e_i\rangle^2 + 3 \sum_{i,j\neq i} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_i, e_j\rangle^2 + \sum_{i\neq j\neq k\neq i} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k\rangle,
\end{aligned}$$

Dann kann man zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_i, e_j\rangle^2 &\le \tfrac{1}{3} \Big(\sum_{i,j,k} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_j, e_k\rangle^2 + 2 \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_i, e_i\rangle^2 \Big) \\
&= \tfrac{1}{3}(1+2\alpha)(S-n)S \qquad (7.11)
\end{aligned}$$

Mit $a = \langle A^3, \mathrm{id}\rangle / S$ und $b = S/n$ erhält man aus (7.10):

(7.12)

$$\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A), A^2\rangle^2 \le \frac{1}{S^2} \sum_{i,j} \langle (\mathrm{D}_{e_i} A) e_i, e_j\rangle^2 \sum_i \Big(S\lambda_i^2 - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \lambda_i - \tfrac{S^2}{n} \Big)^2$$

Der letzte Term erinnert schon an $f\cdot S$, der letzte Summand ist aber falsch. Da $\sum_i \lambda_i = 0$, korrigiert man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\sum_i (S\lambda_i^2 - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \lambda_i - \tfrac{S^2}{n})^2 - \sum_i (S\lambda_i^2 - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \lambda_i - S)^2 \\
&\qquad = 2 \sum_i (-\tfrac{S^3}{n} \lambda_i^2 + S^2 \lambda_i^2) + n(\tfrac{S^4}{n^2} - S^2) \\
&\qquad = -\tfrac{S^4}{n} + 2S^3 - nS^2 \\
&\qquad = -\tfrac{S^2}{n} (S-n)^2
\end{aligned}$$

Kombiniere dies nun mit (7.11) und (7.12) und erhalte so:

$$\begin{aligned}\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A), A^2\rangle^2 &\leq \frac{(1+2\alpha)(S-n)S}{3S^2}\left(f\cdot S - \frac{(S-n)^2S^2}{n}\right)\\ &= \frac{1+2\alpha}{3}\left(f(S-n) - \frac{(S-n)^3 S}{n}\right)\end{aligned}$$

■

Für f wird noch eine grobe Abschätzung benötigt:

Lemma 7.5 *An der Stelle x_c gilt, falls $\lambda := \min \lambda_i, \Lambda := \max \lambda_i$:*

$$f \geq (1+\lambda\Lambda)^2 S.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}f &= \tfrac{1}{S}\sum_i (\lambda_i^2 S - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \lambda_i - S)^2\\ &\geq \tfrac{1}{S}(\Lambda^2 S - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \Lambda - S)^2 + \tfrac{1}{S}(\lambda^2 S - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle \lambda - S)^2\end{aligned}$$

Es gilt nun, den Term $x := \langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ zu eliminieren. Dazu betrachtet man obigen Ausdruck als ein Polynom in x und benutzt dann $ax^2 + bx \geq -\frac{b^2}{4a}$ für $a \geq 0$.

$$\begin{aligned}f &\geq \tfrac{1}{S}\Big[(\Lambda^2+\lambda^2)x^2 - 2S\left((\Lambda^2-1)\Lambda + (\lambda^2-1)\lambda\right)S\\ &\qquad + \left((\Lambda^2-1)^2 + (\lambda^2-1)^2\right)S^2\Big]\\ &\geq \left((\Lambda^2-1)^2 + (\lambda^2-1)^2\right)S - \frac{\left[(\Lambda^2-1)\Lambda + (\lambda^2-1)\lambda\right]^2 S}{\Lambda^2+\lambda^2}\\ &= \tfrac{S}{\Lambda^2+\lambda^2}\Big[\lambda^2(\Lambda^2-1)^2 + \Lambda^2(\lambda^2-1)^2 - 2\Lambda\lambda(\Lambda^2-1)(\lambda^2-1)\Big]\\ &= \tfrac{S}{\Lambda^2+\lambda^2}\Big[\lambda(\Lambda^2-1) - \Lambda(\lambda^2-1)\Big]^2\\ &= \frac{(\Lambda-\lambda)^2}{\Lambda^2+\lambda^2}(1+\Lambda\lambda)^2 S\\ &\geq (1+\Lambda\lambda)^2 S,\end{aligned}$$

da $\Lambda\lambda \leq 0$. ■

Im Verlauf des Beweises wird noch der Ausdruck $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$ auftauchen. Dafür gilt folgende Abschätzung:

Lemma 7.6 *Bei x_c gilt:*

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \leq \tfrac{1}{3}(\Lambda - \lambda)^2(S - n)(1 - \alpha)S.$$

Beweis: Wegen der Symmetrie von $\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} - \mathcal{B}) &= \sum_{i,j,k}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_j)\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle^2 \\
&= \tfrac{1}{3}\sum_{i,j,k}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - \lambda_i\lambda_j - \lambda_i\lambda_k - \lambda_j\lambda_k)\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle^2 \\
&= \tfrac{1}{3}\sum_{i,j} 3(\lambda_i - \lambda_j)^2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i, e_j\rangle^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - \lambda_i\lambda_j - \lambda_i\lambda_k - \lambda_j\lambda_k)\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle^2
\end{aligned}$$

Es sei ohne Einschränkung $\lambda_i \leq \lambda_j \leq \lambda_k$, betrachte

$$g(\lambda_j) = \lambda_i^2 + \lambda_j^2 + \lambda_k^2 - \lambda_i\lambda_j - \lambda_i\lambda_k - \lambda_j\lambda_k$$

als Funktion von λ_j. Diese nach oben geöffnete Parabel erreicht ihr Maximum auf dem Interval $[\lambda_i, \lambda_k]$ auf dem Rand. Dort gilt aber:

$$g|_{\lambda_j=\lambda_i} = g|_{\lambda_j=\lambda_k} = (\lambda_i - \lambda_k)^2 \leq (\Lambda - \lambda)^2$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} - \mathcal{B}) &\leq \tfrac{1}{3}\Big(\sum_{i,j\neq i} 3(\Lambda - \lambda)^2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i, e_j\rangle^2 + \sum_{i\neq j\neq k\neq i}(\Lambda - \lambda)^2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle^2\Big) \\
&= \tfrac{1}{3}(\Lambda - \lambda)^2\Big(\sum_{i,j,k}\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle^2 - \sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_i, e_i\rangle^2\Big) \\
&= \tfrac{1}{3}(\Lambda - \lambda)^2 S(S - n)(1 - \alpha)
\end{aligned}$$

■

7.1 Beweis des Satzes

Es werden nun die vorhergehenden Lemmas benutzt, um den Beweis von Satz 7.1 zu führen. Hierzu wählt man $c = \frac{1}{2}$ in Lemma 7.2 (um möglichst einfach auf f zu stoßen) und erhält einen Punkt x_c, an dem gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= (S-n)\Big(\tfrac{1}{2}S\langle A^4,\mathrm{id}\rangle - \langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2\Big) + 2\langle A^3,\mathrm{id}\rangle\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle - \frac{S}{2}(2\mathcal{A}+\mathcal{B}) \\
&\quad + 3\sum_i\langle \mathrm{D}_{e_i}A, A^2\rangle^2 \\
&\le (S-n)\Big(\tfrac{1}{2}S\langle A^4,\mathrm{id}\rangle - \langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2\Big) + \left[\frac{1}{2(S-n)}\Big(\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle\Big)^2\right] \\
&\quad + \frac{S-n}{2}\langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2 - \frac{S}{2}(2\mathcal{A}+\mathcal{B}) + 3\sum_i\langle \mathrm{D}_{e_i}A, A^2\rangle^2 \\
&\le \frac{S-n}{2}\Big(S\langle A^4,\mathrm{id}\rangle - \langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2 \underline{-2S^2+nS}\Big) + \underline{\tfrac{S}{2}(S-n)(2S-n)} - \frac{S}{2}(2\mathcal{A}+\mathcal{B}) \\
&\quad + 3\sum_i\langle \mathrm{D}_{e_i}A, A^2\rangle^2 + \left[\frac{S}{2}\Big(\frac{4}{3}(\mathcal{A}+2\mathcal{B}) - \frac{16}{9S}\sum_j\langle \mathrm{D}_{e_j}A, A^2\rangle^2\Big)\right] \quad ([\ldots]\text{: Lemma 7.3}) \\
&\le \frac{S-n}{2}f + \frac{S}{2}(S-n)(2S-n) - \frac{S}{6}(2\mathcal{A}-5\mathcal{B}) - \frac{19}{27}(1+2\alpha)\frac{S(S-n)^3}{n} \\
&\quad + \frac{19}{27}(1+2\alpha)(S-n)f \quad \text{(nach Lemma 7.4)} \\
&= \frac{65+76\alpha}{54}(S-n)f + \frac{S}{2}(S-n)(S-n+S) - \frac{S}{6}(2\mathcal{A}-5\mathcal{B}) - \frac{19}{27}(1+2\alpha)\frac{S(S-n)^3}{n}
\end{aligned}
$$

Wenn man $tS=(S-n)$ in die letzte Zeile einsetzt und mit $6/S$ multipliziert, ergibt sich:

$$
-\frac{65+76\alpha}{9}tf \le 3tS^2(t+1) - (2\mathcal{A}-5\mathcal{B}) - \frac{38}{9}(1+2\alpha)\frac{S^3t^3}{n} \tag{7.13}
$$

Erweitere nun diese Ungleichung mit dem Term $\frac{65}{65+76\alpha}$, wobei $\frac{1}{1+2\alpha} \le \frac{65}{65+76\alpha} \le 1$:

$$
-\frac{65}{9}tf \le -65\frac{2\mathcal{A}-5\mathcal{B}}{65+76\alpha} - \frac{38t^3S^3}{9n} + 3t(t+1)S^2 \tag{7.14}
$$

Aber (4.2) und (4.3) zusammen ergeben:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{3}{2}f &\le S(S-n)(S-2n-3) + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) \\
&= t(2t-1-\tfrac{3}{S})S^3 + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) \qquad (7.15)
\end{aligned}
$$

Die Summe von (7.14) und (7.15) ergibt mit Lemma 7.6:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}(1-\frac{130}{27}t)f &\le t(2t-1)S^3 - 3tS^2 + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) - \frac{65(2\mathcal{A}-5\mathcal{B})}{65+76\alpha} - \frac{38t^3S^2}{9} + 3t^2S^2 + 3tS^2 \\
&= t(2t-1)S^3 + 4(\mathcal{A}-\mathcal{B}) - \frac{65(3\mathcal{A}-3\mathcal{B})}{65+76\alpha} - \frac{76\alpha(\mathcal{A}+2\mathcal{B})}{65+76\alpha} - \frac{38t^3S^2}{9} + 3t^2S^2 \\
&\le t(2t-1)S^3 + \left(4 - \frac{195}{65+76\alpha}\right)(\mathcal{A}-\mathcal{B}) - \frac{38t^3S^2}{9} + 3t^2S^2 \quad (\text{da } \mathcal{A}+2\mathcal{B}\ge 0) \\
&\le t\Big((2t-1)S^3 + \frac{1}{3}\left(4 - \frac{195}{65+76\alpha}\right)(1-\alpha)(\Lambda-\lambda)^2S^2 - \frac{38t^2S^2}{9} + 3tS^2\Big) \\
&= (*)
\end{aligned}
$$

Um die endgültigen numerischen Resultate zu erhalten, muß α beseitigt werden. Setze $y = 65 + 76\alpha$ und berechne:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(4 - \frac{195}{65+76\alpha})(1-\alpha) &= \frac{1}{3\cdot 76}(4 - \frac{195}{y})(141 - y)\\ &= \frac{1}{228}(564 + 195 - \frac{195\cdot 141}{y} - 4y)\\ &\leq \frac{1}{228}(759 - 2\sqrt{4\cdot 195\cdot 141}) \qquad \text{(nach C-S)}\\ &=: \gamma\end{aligned}$$

Angenommen, $t \leq \frac{1}{6}$, also $S \leq n + \frac{1}{5}n$. Dann gilt $3t - \frac{38}{9}t^2 < \frac{1}{2} - \frac{1}{9}$. Mit Lemma 7.5 folgt dann aus der Ungleichheitskette oben:

$$\begin{aligned}(*) \quad = \quad & tS^2\Big((2t-1)S + \gamma(\Lambda^2+\lambda^2) - 2\gamma(\Lambda\lambda+1) + 2\gamma + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9}\Big)\\ &\geq \tfrac{3}{2}(1 - \tfrac{65}{81})f\\ &= \tfrac{8}{27}f\\ &\geq \tfrac{8}{27}(1+\Lambda\lambda)^2 S\end{aligned}$$

Mit $\Lambda^2 + \lambda^2 \leq S$ und $ax^2 + bx \geq -\frac{b^2}{4a}$ folgt für $x = (1 + \Lambda\lambda)$:

$$\begin{aligned}0 &\leq tS\Big((2t-1)S + \gamma(\Lambda^2+\lambda^2) + 2\gamma + \tfrac{8}{18} - \tfrac{8}{27tS}(1+\Lambda\lambda)^2 - 2\gamma(1+\Lambda\lambda)\Big)\\ &\leq tS\Big((2t-1)S + \gamma S + 2\gamma + \tfrac{8}{18} + \tfrac{27}{8}\gamma^2 St\Big)\end{aligned}$$

oder

$$0 \leq \Big((2t-1) + \gamma + \tfrac{27}{8}\gamma^2 t + (2\gamma + \tfrac{8}{18})/S\Big)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}t &\geq \frac{1 - \gamma - \frac{1}{S}(2\gamma + \frac{8}{18})}{2 + \frac{27}{8}\gamma^2}\\ &> \frac{2}{9} - \frac{1}{2S}\end{aligned}$$

und damit

$$S - n > \frac{2S}{9} - \frac{1}{2}.$$

Damit ist gezeigt:

$$S > \min\{n + \frac{1}{5}n, n + \frac{2}{7}n - \frac{9}{14}\}$$

■

Anmerkung 1: Für $n \geq 3$ folgt

$$\frac{2}{7}n - \frac{9}{14} = \frac{4n-9}{14} \geq \frac{n}{14},$$

also gilt $S - n \geq \frac{1}{14}n$.

Anmerkung 2: Die Wahl von $c = \frac{1}{2}$ ist natürlich etwas willkürlich. In dem gleichen Text führen die Autoren einen zweiten Beweis mit $c = \frac{5}{9}$. Sie erhalten dadurch mit etwas aufwendigeren Rechnungen das Ergebnis:

$$S > n \implies S > \begin{cases} n + \frac{1}{4}n & \text{falls } n > 17 \\ n + \frac{2}{7}n - \frac{5}{8} & \text{falls } 7 < n \leq 17 \end{cases}$$

Kapitel 8

Der Satz von Yang und Cheng

In diesem Kapitel wird eine weitere Anstrengung gemacht, die bestehenden Sätze noch etwas zu verbessern. Es wird nämlich nach [18] der folgende Satz bewiesen:

Satz 8.1 (Yang & Cheng) *M sei n-dimensionale, geschlossene minimale Hyperfläche in der Einheitssphäre. Wenn das Quadrat der Norm der Weingartenabbildung S konstant ist, so gilt:*

$$S > n > 3 \implies S - n \geq \frac{1}{3}n$$

Ich stütze mich bei den Rechnungen neben den Formeln aus Kapitel 4 auch auf die Ergebnisse aus Kapitel 7.

8.1 Hilfsrechnungen

Wie schon in Kapitel 5, welches den 3-dimensionalen Fall behandelte, reicht die Abschätzung aus Lemma 4.2 hier nicht. Dort wurde gezeigt:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}^2 A\|^2 &\geq 3 \sum_{i,j} U(e_i, e_j)^2 \\ &\geq \tfrac{3}{4} \sum_{i,j} T(e_i, e_j)^2, \end{aligned}$$

wobei $T(X,Y)$ den schiefen Teil von $U(X,Y) = \langle (\mathrm{D}^2_{Y,X} A)X, Y\rangle$ darstellt. Dabei wird schon in der ersten Zeile zuviel verschenkt. Betrachte daher die *totale Symmetrisierung* von $\mathrm{D}^2 A$:

$$\begin{aligned} U(X,Y,V,W) := \tfrac{1}{4}\Big(&\langle (\mathrm{D}^2_{X,Y} A)V, W\rangle + \langle (\mathrm{D}^2_{Y,V} A)W, X\rangle \\ &+ \langle (\mathrm{D}^2_{V,W} A)X, Y\rangle + \langle (\mathrm{D}^2_{W,X} A)Y, V\rangle \Big) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Hierfür gilt das

Lemma 8.2 *A sei die Weingartenabbildung, U die totale Symmetrisierung ihrer zweiten Ableitung und S die Norm von A zum Quadrat. Dann gilt:*

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \geq \|U\|^2 + \tfrac{3}{2}\Big(S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - 2S^2 + nS\Big)$$

Beweis: $\|\mathrm{D}^2 A\|$ besteht aus der Summe über die $\langle(\mathrm{D}^2_{X,Y}A)V, W\rangle^2$, wenn man eine Orthonormalbasis einsetzt. Es interessiert also das *Quadrat* von U.

Die Schwarzsche Ungleichung (1.11) liefert

$$\tfrac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{16}(a+b+c+d)^2 &\leq \tfrac{1}{8}\Big((a+b)^2 + (c+d)^2\Big)\\ &\leq \tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\end{aligned}$$

Wenn man nun die Summe über alle Elemente bildet, so vereinfacht sich dies natürlich, da

$$\tfrac{1}{4}\sum_{a,b,c,d\in\mathcal{M}}(a^2+b^2+c^2+d^2) = \sum_{a\in\mathcal{M}} a^2.$$

Daher folgt schon

$$\sum_{i,j,k,l}\langle(\mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A)e_k, e_l\rangle^2 \geq \sum_{i,j,k,l} U(e_i,e_j,e_k,e_l)^2 \tag{8.2}$$

oder

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \geq \|U\|^2. \tag{8.3}$$

Dies reicht leider noch nicht aus, es müssen noch die Vertauschungsterme $T(e_i, e_j)$ ins Spiel gebracht werden. Daher betrachte nun die Terme gesondert, in denen nur zwei, aber verschiedene Indizes vorkommen. Beispielhaft seien das diejenigen, bei denen zwei Indizes gleich 1 sind und zwei gleich 2.

Ich benutze die Abkürzung $a = \langle(\mathrm{D}^2_{e_1,e_1}A)e_2, e_2\rangle$ und $b = \langle(\mathrm{D}^2_{e_2,e_2}A)e_1, e_1\rangle$. Wegen der Symmetrien von $\mathrm{D}^2 A$ gibt es links keine weiteren Terme mit diesen Indizes.

In der linken Summe von (8.2) kommen a und b wegen der Symmetrie in den hinteren Argumenten je $\binom{3}{1} = 3$ mal vor. Auf der rechten Seite kommen a oder b auch nur in Ausdrücken vor, wo zwei Indizes gleich 1 sind und zwei gleich 2. Wegen der vierfachen Symmetrie von U passiert dies $\binom{4}{2} = 6$ mal. Die Differenz dieser Ausdrücke liefert:

$$\begin{aligned}3a^2 + 3b^2 - \tfrac{6}{16}(2a+2b)^2 &= 3a^2 + 3b^2 - \tfrac{3}{2}(a+b)^2\\ &= \tfrac{3}{2}(a-b)^2\\ &= \tfrac{3}{4}\Big((a-b)^2 + (b-a)^2\Big)\\ &= \tfrac{3}{4}\Big(T(e_1,e_2)^2 + T(e_2,e_1)^2\Big)\end{aligned}$$

Damit ist der gewünschte Term gewonnen:

$$\|\mathrm{D}^2 A\|^2 \geq \|U\|^2 + \tfrac{3}{4} \sum_{i,j \neq i} T(e_i, e_j)^2 \tag{8.4}$$

Die Berechnung dieses Ausdrucks in (4.7) liefert dann die Behauptung. ∎

Ein Lemma aus Kapitel 7 muß in etwas verändeter Form benutzt werden.

Lemma 8.3 *λ und Λ seien der kleinste und der größte Eigenwert der Weingartenabbildung A. Dann gilt:*

$$g \geq \left(\lambda\Lambda + \frac{S}{n}\right)^2 .$$

Anmerkung: Dieses Lemma ähnelt Lemma 7.5 sehr und der Beweis ist auch praktisch identisch.

Beweis: Setze $x = \langle A^3, \mathrm{id}\rangle / S$, A sei in Diagonalgestalt. Dann gilt

$$g = \langle A^4, \mathrm{id}\rangle - Sx^2 - \tfrac{S^2}{n} = \sum_i \left(\lambda_i^2 - x\lambda_i - \tfrac{S}{n}\right)^2$$

Damit zeigt man:

$$\begin{aligned}
g &\geq (\lambda^2 - x\lambda - \tfrac{S}{n})^2 + (\Lambda^2 - x\Lambda - \tfrac{S}{n})^2 \\
&= (\lambda^2 - \tfrac{S}{n})^2 + (\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})^2 - 2x\left(\lambda(\lambda^2 - \tfrac{S}{n}) + \Lambda(\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})\right) + x^2(\lambda^2 + \Lambda^2) \\
&\geq (\lambda^2 - \tfrac{S}{n})^2 + (\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})^2 - \tfrac{1}{\lambda^2+\Lambda^2}\left(\lambda(\lambda^2 - \tfrac{S}{n}) + \Lambda(\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{\lambda^2+\Lambda^2}\left[\Lambda^2(\lambda^2 - \tfrac{S}{n})^2 + \lambda^2(\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})^2 - 2\lambda\Lambda(\lambda^2 - \tfrac{S}{n})(\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})\right] \\
&= \tfrac{1}{\lambda^2+\Lambda^2}\left[\Lambda(\lambda^2 - \tfrac{S}{n}) - \lambda(\Lambda^2 - \tfrac{S}{n})\right]^2 \\
&= \tfrac{1}{\lambda^2+\Lambda^2}\left[(\lambda - \Lambda)(\lambda\Lambda + \tfrac{S}{n})\right]^2 \\
&= \frac{\lambda^2 + \Lambda^2 - 2\lambda\Lambda}{\lambda^2 + \Lambda^2}\left(\lambda\Lambda + \frac{S}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Weil $\lambda\Lambda < 0$ folgt die Behauptung. ∎

8.2 Eine Abschätzung für U

Als nächstes wird eine Abschätzung für U, die totale Symmetrisierung von $\mathrm{D}^2 A$, benötigt. Das erfordert etwas Arbeit. Definiere den Endomorphismus

$$B := A^2 - \left(\frac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle\right) A - \frac{S}{n}\mathrm{id} \tag{8.5}$$

B ist offenbar symmetrisch. Außerdem gilt:

$$\langle B, A\rangle = \langle A^2, A\rangle - \tfrac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle\langle A, A\rangle - \tfrac{S}{n}\langle A, \mathrm{id}\rangle = 0 \tag{8.6}$$

$$\langle B, \mathrm{id}\rangle = \langle A^2, \mathrm{id}\rangle - \tfrac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle\langle A, \mathrm{id}\rangle - \tfrac{S}{n}\langle \mathrm{id}, \mathrm{id}\rangle = 0 \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}\langle B, B\rangle &= \langle B, A^2 - \tfrac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle A - \tfrac{S}{n}\mathrm{id}\rangle \\ &= \langle B, A^2\rangle \\ &= \langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \tfrac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2 - \tfrac{S^2}{n} \\ &= g\end{aligned} \tag{8.8}$$

Zur Erinnerung noch einmal ein paar Rechenregel für konstantes S:

$$\langle A, \mathrm{id}\rangle = 0 \implies \langle \mathrm{D}_X A, \mathrm{id}\rangle = 0 \implies \langle \mathrm{D}^2_{X,Y} A, \mathrm{id}\rangle = 0 \tag{8.9}$$

$$\langle A, A\rangle = S \implies \langle \mathrm{D}_X A, A\rangle = 0$$

$$\implies \langle \mathrm{D}^2_{X,Y} A, A\rangle = -\langle D_X A, \mathrm{D}_Y A\rangle \tag{8.10}$$

$$\|\mathrm{D}A\|^2 = S(S-n) \implies \textstyle\sum_i \langle \mathrm{D}^2_{X,e_i} A, \mathrm{D}_{e_i} A\rangle = 0 \tag{8.11}$$

$$\textstyle\sum_i \mathrm{R}(X, e_i)(\mathrm{D}_Y A)e_i = -(\mathrm{D}_Y A)X - A(\mathrm{D}_Y A)AX \qquad \text{(Lemma 2.1)} \tag{8.12}$$

Es gilt nun für alle $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}_i, \widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}0 \le \sum_{i,j,k,l} \Big[& \overset{(1)}{U(e_i, e_j, e_k, e_l)} - \widetilde{\alpha}\Big(\langle Ae_i, e_j\rangle\langle Be_k, e_l\rangle \overset{(2)}{+} \langle Ae_k, e_l\rangle\langle Be_i, e_j\rangle\Big) \\ & + \Big(\widetilde{\beta}_i\langle(\mathrm{D}_{e_j}A)e_k, e_l\rangle + \widetilde{\beta}_j\langle(\mathrm{D}_{e_k}A)e_l, e_i\rangle \overset{(3)}{+} \widetilde{\beta}_k\langle(\mathrm{D}_{e_l}A)e_i, e_j\rangle + \widetilde{\beta}_l\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j, e_k\rangle\Big) \\ & + \widetilde{\gamma}\langle Ae_i, e_j\rangle\overset{(4)}{\langle} Ae_k, e_l\rangle + \widetilde{\delta}\Big(\langle Ae_i, e_j\rangle\langle e_k, e_l\rangle \overset{(5)}{+} \langle Ae_k, e_l\rangle\langle e_i, e_j\rangle\Big)\Big]^2\end{aligned} \tag{8.13}$$

Dieser Ausdruck wird nun ausmultipliziert. Zunächst die Quadrate:

1-1: $\boldsymbol{\|U\|^2}$

2-2: $\widetilde{\alpha}^2(2\langle A, A\rangle\langle B, B\rangle + 2\langle A, B\rangle^2) = \boldsymbol{2\widetilde{\alpha}^2 Sg}$

3-3: Nach Cauchy-Schwarz $\le 4 \cdot 4 \sum_{i,j,k,l} (\widetilde{\beta}_i^2\langle(\mathrm{D}_{e_j}A)e_k, e_l\rangle^2) = \boldsymbol{16\sum_i \widetilde{\beta}_i^2 \|\mathrm{D}_{e_i} A\|^2}$

4-4: $\widetilde{\gamma}^2\langle A, A\rangle^2 = \boldsymbol{\widetilde{\gamma}^2 S^2}$

5-5: $\widetilde{\delta}^2(2\langle A, A\rangle\langle \mathrm{id}, \mathrm{id}\rangle + 2\langle A, \mathrm{id}\rangle^2) = \boldsymbol{2\widetilde{\delta}^2 nS}$

Nun die gemischten Terme. Wegen der Symmetrien sind viele Kombinationen identisch. So kann man sich leicht überzeugen, daß für symmetrische C, D gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l} U(e_i, e_j, e_k, e_l)\langle Ce_i, e_j\rangle\langle De_k, e_l\rangle = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} & \langle(\mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A)e_k, e_l\rangle\langle Ce_i, e_j\rangle\langle De_k, e_l\rangle \\ & + \langle(\mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A)e_k, e_l\rangle\langle Ce_k, e_l\rangle\langle De_i, e_j\rangle\end{aligned} \tag{8.14}$$

1-2: $-2\cdot 2\widetilde{\alpha}\sum\limits_{i,j,k,l} U(e_i,e_j,e_k,e_l)\langle Ae_i,e_j\rangle\langle Be_k,e_l\rangle =: \boldsymbol{-4\widetilde{\alpha}F}$ (siehe unten)

1-3: $2\cdot 4\widetilde{\gamma}\sum\limits_{i,j,k,l}\widetilde{\beta}_l U(e_i,e_j,e_k,e_l)\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle \overset{(8.11)}{=} 8\frac{3}{4}\sum\limits_{i,l}\widetilde{\beta}_l\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_l}A,\mathrm{D}_{e_i}A\rangle$
$= 6\sum_{i,l}\widetilde{\beta}_l\Big(\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_l}A,\mathrm{D}_{e_i}A\rangle + \langle \mathrm{R}(e_i,e_l)A,\mathrm{D}_{e_i}A\rangle - \langle A\mathrm{R}(e_i,e_l),\mathrm{D}_{e_i}A\rangle\Big)$
$= 6\sum_{j,l}\widetilde{\beta}_l\langle \mathrm{R}(e_l,e_i)(\mathrm{D}_{e_j}A)e_i,Ae_j\rangle$
$\quad + 6\sum\limits_{i,j,k,l}\widetilde{\beta}_l\langle R(e_i,e_l)Ae_k,e_j\rangle\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)e_j,e_k\rangle$ (also der gleiche Term nochmal)
$= 12\sum_{j,l}\widetilde{\beta}_l\big(\langle(\mathrm{D}_{e_j}A)e_l,Ae_j\rangle - \langle A(\mathrm{D}_{e_j}A)Ae_l,Ae_j\rangle\big)$
$= \boldsymbol{-12\sum_l\widetilde{\beta}_l\langle \mathbf{D}_{Ae_l}A,A^2\rangle}$

1-4: $2\widetilde{\gamma}\sum\limits_{i,j,k,l}U(e_i,e_j,e_k,e_l)\langle Ae_i,e_j\rangle\langle Ae_k,e_l\rangle = 2\widetilde{\gamma}\sum\limits_{i,j}\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A,A\rangle\langle Ae_i,e_j\rangle$
$= -2\widetilde{\gamma}\sum_{i,j}\langle \mathrm{D}_{e_i}A,\mathrm{D}_{e_j}A\rangle\langle Ae_i,e_j\rangle = \boldsymbol{-2\widetilde{\gamma}\sum_i\langle(\mathbf{D}_{e_i}A)^2,A\rangle}$

1-5: $2\cdot 2\widetilde{\delta}\sum_{i,j}\frac{1}{2}\Big(\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A,A\rangle\langle e_i,e_j\rangle + \langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A,\mathrm{id}\rangle\langle Ae_i,e_j\rangle\Big) = \boldsymbol{-2\widetilde{\delta}\sum_i\|\mathbf{D}_{e_i}A\|^2}$

2-3: Hier tauchen vier Typen von Termen auf:

- $-2\sum_{i,j,k,l}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_i\langle Ae_i,e_j\rangle\langle Be_k,e_l\rangle\langle(\mathrm{D}_{e_j}A)e_k,e_l\rangle = -2\sum_{i,j}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_i\langle Ae_i,e_j\rangle\langle \mathrm{D}_{e_j}A,A^2\rangle$
- Mit $\widetilde{\beta}_j$ analog, hiervon gibt es also 4 Terme
- $-2\sum_{i,j,k,l}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_k\langle Ae_i,e_j\rangle\langle Be_k,e_l\rangle\langle(\mathrm{D}_{e_l}A)e_j,e_i\rangle = -2\sum_{k,l}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_k\langle Be_k,e_l\rangle\langle \mathrm{D}_{e_l}A,A\rangle$
  $= 0$
- $\widetilde{\beta}_l$ ist wieder analog, also 0. Daher

$= \boldsymbol{-8\sum_i\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_i\langle \mathbf{D}_{Ae_i}A,A^2\rangle}$

2-4: $-2\cdot 2\widetilde{\alpha}\widetilde{\gamma}\langle A,A\rangle\langle A,B\rangle = 0$

2-5: $-2\cdot 2\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}(\langle A,A\rangle\langle B,\mathrm{id}\rangle + \langle A,\mathrm{id}\rangle\langle B,A\rangle) = 0$

3-4: $2\cdot 4\sum_{i,j}\widetilde{\beta}_i\widetilde{\gamma}\langle \mathrm{D}_{e_j}A,A\rangle\langle Ae_i,e_j\rangle = 0$

3-5: Hier gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

- $2\cdot 4\sum_{i,j}\widetilde{\beta}_i\widetilde{\delta}\langle \mathrm{D}_{e_j}A,\mathrm{id}\rangle\langle Ae_i,e_j\rangle = 0$
- $2\cdot 4\sum_{i,j}\widetilde{\beta}_i\widetilde{\delta}\langle \mathrm{D}_{e_j}A,A\rangle\langle e_i,e_j\rangle = 0$

4-5: $2\cdot 2\widetilde{\gamma}\widetilde{\delta}\langle A,A\rangle\langle A,\mathrm{id}\rangle = 0$

Damit erhält man zunächst die Abschätzung:

(8.15)
$$\begin{aligned}\|U\|^2 \geq{}& 4\widetilde{\alpha}F - 2\widetilde{\alpha}^2Sg + 8\sum_i\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}_i\langle \mathrm{D}_{Ae_i},A^2\rangle + 12\sum_i\widetilde{\beta}_i\langle \mathrm{D}_{Ae_i},A^2\rangle\\ &- 16\sum_i\widetilde{\beta}_i^2\|\mathrm{D}_{e_i}A\|^2 + 2\widetilde{\gamma}\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle - \widetilde{\gamma}^2S^2 + 2\widetilde{\delta}S^2t - 2\widetilde{\delta}^2Sn\end{aligned}$$

Bevor die Konstanten gewählt werden, wird noch der Term F berechnet. Als Vorbereitung gilt:

$$\begin{aligned}(8.16)\qquad \sum_{i,j}\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A, A\rangle\langle A^2e_i, e_j\rangle &= -\sum_i \lambda_i^2\|\mathrm{D}_{e_i}A\|^2 = -\mathcal{A}\\ &= \sum_i \lambda_i^2\lambda_j\langle(\mathrm{D}^2_{e_i,e_i}A)e_j, e_j\rangle\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A, A^2\rangle\langle Ae_i, e_j\rangle &= \sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j^2\langle(\mathrm{D}^2_{e_i,e_i}A)e_j, e_j\rangle\\ &\overset{(4.6)}{=} -\mathcal{A} + \sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j^2(\lambda_j-\lambda_i)(1+\lambda_i\lambda_j)\\ &= -\mathcal{A} + 0 - S^2 + S\langle A^4, \mathrm{id}\rangle - \langle A^3, \mathrm{id}\rangle^2\\ &= -\mathcal{A} + Sg + \frac{S^2t}{1-t},\end{aligned}$$

da $\frac{S^2(S-n)}{n} = \frac{S^2t}{1-t}$.

Setze $x := \frac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}F &= \sum_{i,j,k,l} U(e_i,e_j,e_k,e_l)\langle Ae_i, e_j\rangle\langle(A^2 - xA - \tfrac{S}{n}\mathrm{id})e_k, e_l\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(\langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A, A^2 - xA - \tfrac{S}{n}\mathrm{id}\rangle\langle Ae_i, e_j\rangle\\ &\qquad + \langle \mathrm{D}^2_{e_i,e_j}A, A\rangle\langle(A^2 - xA - \tfrac{S}{n}\mathrm{id})e_i, e_j\rangle\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\Big[-\mathcal{A} + Sg + \tfrac{S^2t}{1-t} + x\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle - \mathcal{A} + x\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle + \tfrac{S^2t}{1-t}\Big],\end{aligned}$$

also

$$(8.17)\qquad F = -\mathcal{A} + \frac{1}{2}Sg + \frac{S^2t}{1-t} + \frac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle.$$

Wähle nun die Konstanten:

$$(8.18)\qquad \begin{cases} \widetilde{\gamma} = \frac{1}{S^2}\sum_i\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle\\ \widetilde{\delta} = \frac{tS}{2n} = \frac{t}{2(1-t)}\\ \widetilde{\beta}_i = \frac{2\widetilde{\alpha}+3}{8tS^2}\langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle\\ \widetilde{\alpha} = \dfrac{1}{Sg - \frac{1}{2tS^2}\sum_i\langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2}\left(F + \dfrac{3}{4tS^2}\sum_i\langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2\right)\end{cases}$$

Zusammen führt das zu

Lemma 8.4 *Für die Norm der totalen Symmetrisierung von* D^2A *gilt:*

$$\begin{aligned}\|U\|^2 \geq & \frac{9}{4tS^2}\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2 + \frac{1}{S^2}\Big(\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A), A\rangle\Big)^2 + \frac{t^2S^2}{2(1-t)} \\ & + \frac{1}{2[Sg - \frac{1}{2tS^2}\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2]}\left(2F + \frac{3}{2tS^2}\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2\right)^2,\end{aligned}$$

wobei g *in* (7.2) *und* F *in* (8.17) *definiert wurde.*

Beweis: Zur Vereinfachung der Ausdrücke setze ich:

$$\begin{aligned} M &:= \textstyle\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2 \\ k &:= \tfrac{1}{4tS^2} \\ N &:= Sg - 2kM \qquad \text{(der Nenner)}\end{aligned}$$

Zuerst kümmere ich mich um die letzten vier Terme aus (8.15):

$$2\widetilde{\gamma}\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle - \widetilde{\gamma}^2S^2 = \frac{1}{S^2}\Big(\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle\Big)^2$$

und

$$2\widetilde{\delta}S^2t - 2\widetilde{\delta}^2Sn = \frac{t^2S^2}{2(1-t)}.$$

Diese Vereinfachungen erklären auch die Wahl von $\widetilde{\gamma}$ und $\widetilde{\delta}$. Den Term mit $\widetilde{\beta}_i^2$ schätzt man noch einmal mit Cauchy-Schwarz ab:

$$\begin{aligned}-16\sum_i \widetilde{\beta}_i^2\|\mathrm{D}_{e_i}A\|^2 &\geq -16\tfrac{k^2}{4}(2\widetilde{\alpha}+3)^2M\cdot tS^2 \\ &= -k(2\widetilde{\alpha}+3)^2M \qquad (\text{da } tS^2 = 1/(4k))\end{aligned}$$

Wenn man nun den 3. und den 4. Term zusammenfasst, so bleibt von (8.15):

$$\begin{aligned}(8.19)\quad \mathfrak{R} &:= 4\widetilde{\alpha}F - 2\widetilde{\alpha}^2Sg + 4k(\widetilde{\alpha}+\tfrac{3}{2})(2\widetilde{\alpha}+3)M - k(2\widetilde{\alpha}+3)^2M \\ &= 4\widetilde{\alpha}F - 2\widetilde{\alpha}^2Sg + 4k(\widetilde{\alpha}+\tfrac{3}{2})^2M,\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{N}[F+3kM]$. Setze nun $\widetilde{\alpha}$ in die ersten beiden Terme ein und bringe sie auf den Hauptnenner $\frac{1}{N^2}$:

$$\begin{aligned}&\frac{4F(F+3kM)}{N} - \frac{2Sg}{N^2}(F+3kM)^2 \\ &\quad = \frac{1}{N^2}\Big(4F(F+3kM)(Sg-2kM) - 2Sg(F+3kM)^2\Big) \\ (8.20)\qquad &\quad = \frac{1}{N^2}\Big(2F^2Sg - 8kF^2M + 0 - 0 - 24k^2FM^2 - 18k^2M^2Sg\Big)\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\widetilde{\alpha} + \tfrac{3}{2} = \frac{1}{N}(F + 3kM + \tfrac{3}{2}Sg - 3kM) = \frac{1}{N}(F + \tfrac{3}{2}Sg),$$

daher ist der dritte Term aus (8.19):

$$4k(\widetilde{\alpha} + \tfrac{3}{2})^2 M = \frac{1}{N^2}(4kF^2M + 12kFMSg + 9kMS^2g^2) \tag{8.21}$$

(8.20) und (8.21) addiert ergeben schließlich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \tfrac{1}{N^2}(2F^2Sg - 4kF^2M - 24k^2FM^2 - 18k^2M^2Sg + 12kFMSg + 9kMS^2g^2) \\
&= \tfrac{1}{N^2}\Big(Sg(2F^2 + 12kFM + 9kMSg) - 2kM(2F^2 + 12kFM + 9kMSg)\Big) \\
&= \tfrac{1}{N}\Big(\tfrac{1}{2}(2F + 6kM)^2 - 18k^2F^2M^2 + 9kMSg\Big) \\
&= \tfrac{1}{2N}(2F + 6kM)^2 + 9kM
\end{aligned}$$

■

Für den Fall, daß $\langle A^3, \mathrm{id}\rangle$ konstant ist, verschwindet der Term $\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i} A, A^2\rangle^2$, damit vereinfacht sich die Abschätzung also deutlich. Yang und Cheng benutzen dies, um dann $S - n \geq \frac{2}{3}n$ zu zeigen. Im allgemeinen bleibt die Ungleichung aber unhandlich, es muß daher noch einmal abgeschätzt werden.

Es soll nun noch der lästigen Nenner im letzten Term aus Lemma 8.4 eliminiert werden. Dazu benutzt man die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2N}(N + x)^2 &\geq \frac{1}{2N}(N^2 + 2Nx) \\
&\geq \frac{1}{2}N + x \qquad (\text{für } N \geq 0).
\end{aligned}$$

Hier gilt: $N = Sg - 2kM$ und $F = \frac{1}{2}Sg - \mathcal{A} + \frac{S^2 t}{1-t} + \frac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i} A)^2, A\rangle$. Zeige zunächst $N \geq 0$:

$$\begin{aligned}
2kM &= \frac{1}{2tS^2}\sum\nolimits_i \lambda_i^2 \langle \mathrm{D}_{e_i} A, A^2\rangle^2 \\
&\leq \frac{S}{2tS^2}\sum\nolimits_i \langle \mathrm{D}_{e_i} A, A^2\rangle^2 \\
&\leq \frac{1}{2tS} \cdot \frac{1 + 2\alpha}{3} tS^2 g \qquad (\text{nach Lemma 7.4}) \\
&\leq Sg \qquad (\text{da } g > 0)
\end{aligned}$$

Man kann also aus Lemma 8.4 weiter abschätzen:

(8.22)

$$\begin{aligned}\|U\|^2 &\geq 9kM + \frac{1}{S^2}\Big(\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle\Big)^2 + \frac{t^2S^2}{2(1-t)} \\ &\quad + \frac{1}{2(Sg-2kM)}\Big[(Sg-2kM) + (-2\mathcal{A} + 8kM + \frac{2S^2t}{1-t} + \frac{2}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle)\Big]^2 \\ &= \frac{1}{2}Sg + \frac{4}{tS^2}\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2 - 2\mathcal{A} + \frac{2}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle \\ &\quad + \frac{tS^2}{1-t}(2+\tfrac{1}{2}t) + \frac{1}{S^2}\Big(\sum_i \langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle\Big)^2\end{aligned}$$

8.3 Beweis des Satzes von Yang und Cheng

Setze nun Gleichung (8.22) mit Satz 2.5

$$\|\mathrm{D}^2A\|^2 = (S-2n-3)\|\mathrm{D}A\|^2 + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B})$$

und Lemma 8.2

$$\|\mathrm{D}^2A\|^2 \geq \|U\|^2 + \frac{3}{2}Sg + \frac{3}{2}\cdot\frac{t^2S^2}{1-t}$$

zusammen. Mit den dann vorkommenden Summen kann man direkt nichts anfangen, man kann sie zunächst zusammenfassen zu

(8.23)

$$G := \frac{1}{S}\langle A^3, \mathrm{id}\rangle \sum_i 2\langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle + \frac{1}{4S^2}\Big(\sum_i 2\langle (\mathrm{D}_{e_i}A)^2, A\rangle\Big)^2 + \frac{4}{tS^2}\sum_i \langle \mathrm{D}_{Ae_i}A, A^2\rangle^2.$$

Es ergibt sich:

$$(S-2n-3)tS^2 + 3(\mathcal{A}-2\mathcal{B}) \geq 2Sg + G - 2\mathcal{A} + \frac{tS^2}{1-t}(2+\tfrac{1}{2}t) + \frac{3t^2S^2}{2(1-t)}$$

oder

(8.24)

$$\begin{aligned}G &\leq -2Sg + tS^2\Big((S-2(1-t)S-3) - \tfrac{4+t}{2(1-t)} - \tfrac{3t}{2(1-t)}\Big) + 5\mathcal{A} - 6\mathcal{B} \\ &= -2Sg + tS^2\Big(2tS - S - 3 - \tfrac{2-2t+4t}{1-t}\Big) + 5\mathcal{A} - 6\mathcal{B} \\ &= -2Sg + tS^2\Big(2tS - S - 5 - \frac{4t}{1-t}\Big) + 5\mathcal{A} - 6\mathcal{B}.\end{aligned}$$

Schätze nun $-\frac{13}{3}tSg - G$ ab. Zunächst wendet man Lemma 7.2 mit der Konstanten $c = 1/(1+c_0)$ an. Wenn man durch cS teilt, ergibt sich: Es gibt einen Punkt x_c, an dem gilt

$$-tS\langle A^4,\mathrm{id}\rangle + t(1+c_0)\langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2 = \frac{1+c_0}{S}\langle A^3,\mathrm{id}\rangle\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle - (2\mathcal{A}+\mathcal{B}) + \frac{3(1+c_0)}{S}\sum_i\langle \mathrm{D}_{e_i}A,A^2\rangle^2. \tag{8.25}$$

Wähle c_0 dabei als die kleinere Nullstelle des Polynoms $13c_0^2-(22+3t)c_0+\frac{100}{13}$, also

$$c_0 = \frac{22+3t-\sqrt{(22+3t)^2-400}}{26}. \tag{8.26}$$

Dann gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3c_0}\Big(c_0+\frac{10}{13}\Big)^2 &= \frac{1}{3\cdot 13c_0}\Big(c_0^2+20c_0+\tfrac{100}{13}\Big)\\ &= \frac{1}{3\cdot 13}(42+3t)\\ &= \frac{14+t}{13}\end{aligned} \tag{8.27}$$

Die folgenden Rechnungen beziehen sich alle auf den Punkt x_c. Ich gehe nun die Terme in $-\frac{13}{3}tSg-G$ schrittweise durch. Im 1. Schritt gilt nach (8.25)

$$\begin{aligned}-\frac{13}{3}tSg &= \frac{13}{3}\Big(-tS\langle A^4,\mathrm{id}\rangle + t\langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2 + \frac{tS^2}{1-t}\Big)\\ &= -\frac{13}{3}tc_0\langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2 + \frac{13(1+c_0)}{3S}\langle A^3,\mathrm{id}\rangle\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle - \frac{13}{3}(2\mathcal{A}+\mathcal{B})\\ &\quad + \frac{13(1+c_0)}{S}\sum_i\langle \mathrm{D}_{e_i}A,A^2\rangle^2 + \frac{13}{3}\cdot\frac{tS^2}{1-t}.\end{aligned} \tag{8.28}$$

Der erste und der zweite Term eignet sich zu einer quadratischen Ergänzung, bei der $\langle A^3,\mathrm{id}\rangle$ eliminiert werden kann. Dazu nimmt man noch den ersten Term von G hinzu und gewinnt ein Vielfaches des zweiten Terms von G dazu, den man ja nach Lemma 7.3 abschätzen kann:

$$-\frac{13}{3}c_0t\langle A^3,\mathrm{id}\rangle^2 + \frac{13}{3S}\Big(c_0+\frac{10}{13}\Big)\langle A^3,\mathrm{id}\rangle\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle \le \frac{13}{3t\cdot 4c_0S^2}\Big(c_0+\frac{10}{13}\Big)^2\Big(\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle\Big)^2 \tag{8.29}$$

Addiert man nun hierzu noch den zweiten Term von G, so ergibt sich

$$\frac{13}{3tS^2}\Big[\frac{1}{4c_0}\Big(c_0+\frac{10}{13}\Big)^2-\frac{3t}{52}\Big]\Big(\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle\Big)^2.$$

Jetzt ist es Zeit, die Konstante c_0 einzusetzen. Nach (8.27) gilt:

$$\frac{13}{3tS^2}\Big[\frac{3}{3\cdot 4c_0}\Big(c_0+\frac{10}{13}\Big)^2-\frac{3t}{52}\Big]=\frac{13}{3tS^2}\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{14+t}{13}-\frac{3t}{52}\Big)$$
$$=\frac{14}{4tS^2}$$

Zusammen bringen die letzen Schritte

$$(8.30)\quad -\frac{13}{3}tSg-G\le-\frac{13}{3}(2\mathcal{A}+\mathcal{B})+\frac{14}{4tS^2}\Big(\sum_i 2\langle(\mathrm{D}_{e_i}A)^2,A\rangle\Big)^2+\frac{13tS^2}{3(1-t)}$$
$$-\frac{4}{tS^2}\sum_i\langle\mathrm{D}_{Ae_i}A,A^2\rangle^2+\frac{13(1+c_0)}{S}\sum_i\langle\mathrm{D}_{e_i}A,A^2\rangle^2.$$

Die letzten Summen werden nun zu einem Ausdruck zusammengefasst. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß $\langle\mathrm{D}_{Ae_i}A,A^2\rangle^2=\lambda_i^2\langle\mathrm{D}_{e_i}A,A^2\rangle^2$ und mit Lemma 7.3 von Seite 47 folgt mit der Null-Summe $\frac{2}{tS}-\frac{2}{tS}$:

$$\begin{aligned}-G&\le\frac{13}{3}tSg-\frac{13}{3}(2\mathcal{A}+\mathcal{B})+\frac{14}{3}(\mathcal{A}+2\mathcal{B})+\frac{13tS^2}{3(1-t)}\\&\quad-\sum_i\Big[\frac{14}{3}\cdot\frac{4}{S+2\lambda_i^2}+\frac{2(S+2\lambda_i^2)}{tS^2}-\frac{2}{tS}-\frac{13(1+c_0)}{S}\Big]\langle\mathrm{D}_{e_i}A,A^2\rangle^2\\&\le\frac{13}{3}tSg-4\mathcal{A}+5\mathcal{B}-\frac{1}{S}\Big[8\sqrt{\frac{7}{3t}}-\frac{2}{t}-13(1+c_0)\Big]\sum_i\langle\mathrm{D}_{e_i}A,A^2\rangle^2+\frac{13tS^2}{3(1-t)}\end{aligned}$$

Jetzt muß die eckige Klammer untersucht werden. Dazu muß t auf ein geeignetes Intervall eingeschränkt werden. Man kann folgende Annahmen machen:

- $t\ge\frac{1}{15}$: Anmerkung 1 aus Kapitel 7 zeigt, daß $S-n>\frac{n}{14}$, also $t>\frac{1}{15}$. Diese Abschätzung ist nicht sehr gut, für große n könnte man hier $\frac{1}{6}$ wählen, es zeigt sich aber, daß für die Abschätzung die *rechte* Seite entscheidend ist.
- $t<\frac{1}{4}$: Dies ist äquivalent zu $S-n<\frac{n}{3}$. Die Negation hiervon ist die Aussage des zu beweisenden Satzes 8.1, diese Annahme läßt sich also auch gefahrlos machen.

Zeige also das folgende

Lemma 8.5 *Definiere* $h(t):=-[\ldots]$ *und* $[a,b]:=[1/15,1/4]$, *also*

$$\begin{aligned}h(t)&=-\left[8\sqrt{\frac{7}{3t}}-\frac{2}{t}-13(1+c_0)\right]\\&=-\frac{1}{3t}(8\sqrt{21t}-6)+13\Big(1+\frac{1}{26}(22+3t-\sqrt{(22+3t)^2-400})\Big).\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\forall t\in[a,b]:\qquad h(t)\le\frac{13}{5}.$$

Beweis: Für $t \in [a,b]$ gilt

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{3t}(8\sqrt{21t}-6)+24+\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{84+132t+9t^2} \\ &\le \underbrace{-\frac{1}{3t}(8\sqrt{21t}-6)+24}_{=:f_1} \quad \underbrace{+\frac{3t}{2}-\sqrt{3}\sqrt{7+11t}}_{=:f_2}. \end{aligned}$$

Behauptung: $f_1 + f_2$ ist auf $[a,b]$ zunächst monoton fallend, dann monoton steigend, das Maximum liegt also auf dem Rand.

Man kann also die Untersuchungen an f_1' und f_2' durchführen, siehe auch Abbildung 1.

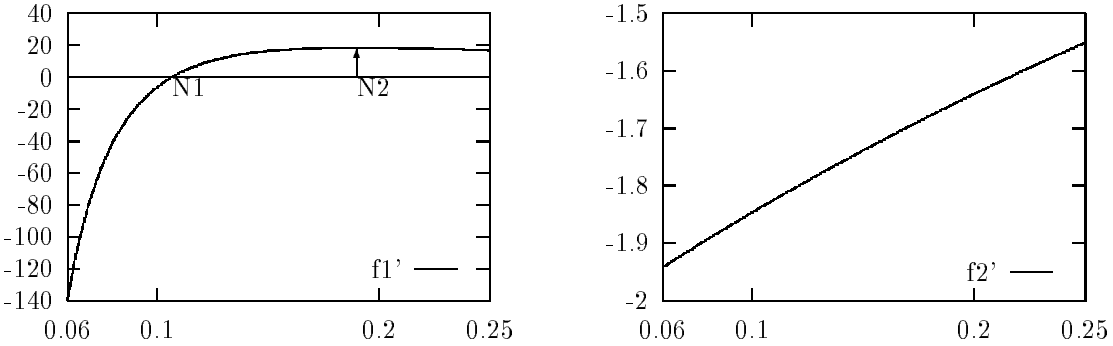

Abbildung 1: f_1' und f_2'

Dabei gilt: Für $\zeta(t) = \frac{2\sqrt{at}+b}{t^k}$ folgt

$$\zeta'(t) = \frac{t^k \frac{a}{\sqrt{at}} - k(2\sqrt{at}+b)t^{k-1}}{t^{2k}} = \frac{-(2k-1)\sqrt{at}-kb}{t^{k+1}}.$$

Also gilt:

$$f_1' = \frac{4\sqrt{21t}+6}{3t^2} \qquad f_2' = \frac{3}{2} - \frac{11}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7+11t}}$$

$$f_1'' = \frac{-6\sqrt{21t}+12}{3t^3} \qquad f_2'' = \frac{121}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(7+11t)^3}}$$

$$N_1 := \frac{3}{28} \qquad N_2 := \frac{4}{21}$$

Durch einfaches Ausrechnen folgt für $t \in [a,b]$:

- $f_1'(a) < 0, f_1'(b) > 10, f_1'(N_1) = 0$ ist einzige Nullstelle. Damit gilt das behauptete Monotonieverhalten bereits für den Anteil f_1. Leider reicht f_1 nicht aus, um die Abschätzung zu beweisen. Die Störungen sind aber so klein, daß sie zumindest die Monotonie nicht beeinträchtigen.
- $f_1''(a) > 0, f_1''(b) < 0, f_1''(N_2) = 0$ ist wieder einzige Nullstelle und $N_2 > N_1$. f_1' ist also auf $[a, N_2]$ monoton steigend, auf $[N_2, b]$ monoton fallend.

- $f_2''(t) > 0$, also ist $f_2'(t)$ monoton steigend. Wegen der Monotonie lassen sich jetzt Abschätzungen für die einzelnen Intervalle angeben, indem die Ausdrücke an den passenden Grenzen ausgewertet werden.
- $-2 < f_2'(t) < 0$. Damit gilt: $(f_1' + f_2')(a) < 0$, $(f_1' + f_2')(N_2) > 8$. Da diese Funktion auf $[a, N_2]$ steigend ist, hat sie eine eindeutige Nullstelle wie behauptet. Jetzt fehlt nur noch, daß auf $[N_2, b]$ keine Nullstelle liegt. Aber aus dem bereits Berechneten folgt, daß $f_1'\big|_{[N_2,b]} > 10$, also gilt $(f_1' + f_2')\big|_{[N_2,b]} > 8$.

Damit ist obige Behauptung bewiesen. Es folgt $h(t) \leq \max\{h(a), h(b)\} \leq \frac{13}{5}$. ∎

Mit Lemma 7.4 von Seite 47 ergibt sich

$$-\frac{1}{S}\Big[8\sqrt{\frac{7}{3t}} - \frac{2}{t} - 13(1+c_0)\Big]\sum_i \langle \mathrm{D}_{e_i} A, A^2\rangle^2 \leq \frac{13}{5\cdot 3}(1+2\alpha)tSg \tag{8.31}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} -G &\leq \frac{13}{3}tSg + \frac{13}{15}(1+2\alpha)tSg - 4\mathcal{A} + 5\mathcal{B} + \frac{13tS^2}{3(1-t)} \\ &= \frac{13}{3}\Big(\frac{6+2\alpha}{5}\Big)tSg - 4\mathcal{A} + 5\mathcal{B} + \frac{13tS^2}{3(1-t)} \\ &\leq \frac{13}{10}\Big(1+\frac{1}{3}\alpha\Big)Sg - 4\mathcal{A} + 5\mathcal{B} + \frac{13tS^2}{3(1-t)}, \end{aligned}$$

da $t < 1/4$.

An dieser Stelle verwenden Yang und Cheng eine Abschätzung, die ich nicht nachvollziehen konnte. Daher mache ich nun anders weiter. Wenn ich nämlich diese Zeile zu (8.24) addiere, so bleibt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{13}{10}(1+\frac{1}{3}\alpha)Sg - 2Sg + (\mathcal{A}-\mathcal{B}) + \Big(2tS - S - 5 - \frac{4t}{1-t} + \frac{13}{3(1-t)}\Big)tS^2 \\ &= -\frac{7}{10}Sg + \frac{13}{30}\alpha Sg + (\mathcal{A}-\mathcal{B}) + \Big(2tS - S - \frac{2}{3} + \frac{t}{3(1-t)}\Big)tS^2, \end{aligned}$$

da $\frac{-12t+13}{3(1-t)} = 13\frac{1-t}{3(1-t)} + \frac{t}{3(1-t)}$.

$\frac{t}{3(1-t)}$ ist auf dem Intervall $[\frac{1}{15}, \frac{1}{4}]$ monoton steigend, läßt sich also durch $\frac{1}{9}$ abschätzen. Nach Lemma 7.6 (Seite 50) gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \mathcal{B} &\leq \frac{1}{3}(\lambda-\Lambda)^2 tS^2(1-\alpha) \\ &\leq \frac{1}{3}(\lambda-\Lambda)^2 tS^2 \end{aligned}$$

Da $\alpha < 1$ und $g > 0$ nach Lemma 8.3, so gilt mit der Abschätzung aus diesem Lemma:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{10}Sg + \frac{13}{30}\alpha Sg &\leq -\frac{8}{30}Sg \\ &\leq -\frac{8}{30}\Big(\lambda\Lambda + \frac{1}{1-t}\Big)^2 S \end{aligned}$$

Zusammen folgt:

$$0 \leq tS^2\Big(2tS - S - \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\Big) + \frac{1}{3}(\lambda^2 + \Lambda^2 - 2\lambda\Lambda)tS^2 - \frac{8}{30}\Big(\lambda\Lambda + \frac{1}{1-t}\Big)^2 S$$

Setze $zS := -\lambda\Lambda - \frac{1}{1-t}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\lambda\Lambda tS^2 - \frac{8}{30}\Big(\lambda\Lambda + \frac{1}{1-t}\Big)^2 S &= \Big(\frac{2}{3}tz - \frac{8}{30}z^2\Big)S^3 + \frac{2}{3}\frac{tS^2}{1-t} \\ &\leq \frac{4t^2}{9}\cdot\frac{30}{32}S^3 + \frac{2}{3}\frac{tS^2}{1-t} \\ &= \frac{5t^2S^3}{12} + \frac{2}{3}\frac{tS^2}{1-t}. \end{aligned}$$

Somit schließt man

$$\begin{aligned} 0 &\leq tS^2\Big(2tS - S - \frac{5}{9} + \frac{1}{3}S + \frac{5}{12}tS + \frac{2}{3(1-t)}\Big) \\ &\leq tS^2\Big(\frac{29}{12}tS - \frac{2}{3}S + \frac{1}{3}\Big) \qquad \text{(wieder wegen } t < 1/4\text{)}. \end{aligned}$$

Mit $tS = S - n$ folgt

$$\frac{21}{12}S \geq \frac{29}{12}n - \frac{1}{3}$$

und daher

$$S - n \geq \frac{8}{21}n - \frac{4}{21}$$

Für $n \geq 4$ kann man dies zu

$$S - n \geq \frac{1}{3}n$$

vereinfachen. Diese Abschätzung gilt zwar nur für den gewählten Punkt, aber hier wie in den vorigen Kapiteln gilt: Da S konstant ist, gilt die Ungleichung überall. ∎

Anmerkung: Für große n folgt also $S - n \geq 0.38n$. Yang und Cheng erzielen hier den Faktor $0.42n$, die Ergebnisse unterscheiden sich also nur minimal.

Fazit

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der zweiten Lücke im Wertebereich der Norm der Weingartenabbildung bei minimalen Hyperflächenimmersionen in die S^{n+1}. Neben der bereits bekannten Tatsache, daß Werte zwischen 0 und n nicht auftreten können, wurden hier Beweise für Lücken direkt nach n geführt.

Die folgende Abbildung stellt die Fortschritte auf diesem Gebiet dar. Die x-Achse bezeichnet n, die Dimension der Hyperfläche, die y-Achse die Größe der Lücke dividiert durch n: Für $S - n \geq f(n)$ wird also $f(n)/n$ aufgetragen. Cherns Vermutung war, daß der nächste erlaubte Wert $2n$ ist (basierend auf den bekannten Beispielen von Cartan und Münzner), was in der Graphik einem Wert von 1 entspräche.

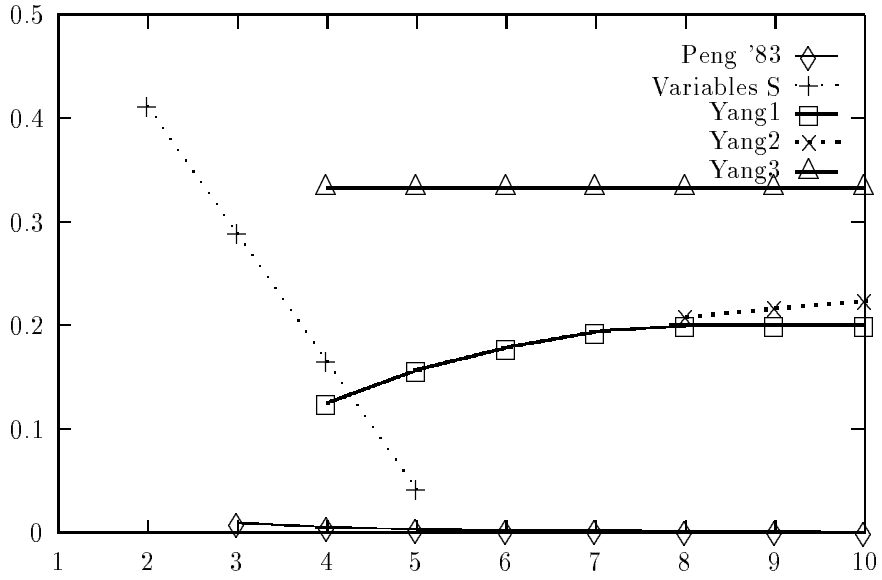

Abbildung 2: Vergleich

Peng '83 ist die Arbeit von Peng und Terng von 1983 [10], die erstmals eine Lücke etablierte, allerdings für konstante Norm der Weingartenabbildung. Gleichzeitig zeigten sie noch ein Ergebnis für *variables S* [11], welches allerdings nur bis zur Dimension 5 reicht. Alle weiteren Beweise setzen auch konstantes S voraus. Nicht dargestellt ist ihr Beweis für Cherns Vermutung bei $n = 3$.

1994 erschien dann eine Arbeit von Yang und Cheng [17] (*Yang1*), in der ein lineares Wachstum der Lücke mit n erzielt wird. Ein zweiter Satz aus dieser Arbeit (*Yang2*) verbessert das Resultat noch etwas (die Kurve wird bei $n = 17$ auf $1/4$ waagerecht).

Yang3 beschreibt schließlich die jüngsten Resultate, die Professor Cheng anläßlich seines Besuchs in Bonn im Winter 1994/1995 vortrug ([18]).

Die zugrundeliegenden Identitäten sind bei allen vorliegenden Arbeiten gleich: Zentral ist immer die Laplace der Norm der Weingartenabbildung. Mit Hilfe von Vertauschungsregeln der dritten Ableitungen von Endomorphismenfeldern kann er in Verbindung mit dem Krümmungstensor gebracht werden kann. Durch die Gaußgleichung exisiert wieder ein Bezug zurück zur Weingartenabbildung, so daß Identitäten entstehen, in denen nur die diese und die Metrik vorkommen.

Es besteht aber durchaus Hoffnung, daß Cherns Vermutung mit diesen Techniken einmal widerlegt oder bewiesen werden kann. So erwecken insbesondere die Rechnungen aus Kapitel 8 nicht den Anschein, als ob alle Abschätzungen schon ausgereizt oder optimal eingesetzt seien. So läßt sich die Wahl der Konstanten eigentlich nur durch das Ergebnis motivieren. Es besteht also die Hoffnung, daß ein etwas zielstrebigerer Ansatz einmal eine bessere Abschätzung liefert.

Literaturverzeichnis

[1] E. Cartan: *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Annali di Mat. **17** (1938), 177–191

[2] S.S. Chern: *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold.* Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kansas, 1968

[3] S.S. Chern, M. do Carmo und S. Kobayashi: *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length.* In functional analysis and related fields, edited by F. Browder, Springer-Verlag, Berlin, 1970, 59–74

[4] M.P. do Carmo: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Wiesbaden, 1992

[5] H. Karcher: *Differentialgeometrie III*, Skript WS 1975/76, Bonn

[6] H. Karcher: *Differentialgeometrie I und II*, Mitschrift zu den Vorlesungen im WS 1992/93 bzw. SS 1993, Bonn

[7] H.B. Lawson, jr.: *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. Math. **89** (1969), 187–197

[8] H.F. Münzner: *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären*, Math. Ann. **251** (1980), 57–71

[9] K. Numitsu und B. Smyth: *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geometry **3** (1969), 367–377

[10] C.-K. Peng und C.-L. Terng: *Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature*, Seminar on minimal submanifolds, Princeton Univ. Press, Princeton (1983), 177–198

[11] C.-K. Peng und C.-L. Terng: *The scalar curvature of minimal hypersurfaces in spheres*, Math. Ann. **266** (1983), 105–113

[12] J. Simons: *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105

[13] M. Spivak: *Differential geometry*, Vol. I - V, Publish or Perish, Boston, 1970–75

[14] R. Walter: *Compact hypersurfaces with a constant higher mean curvature function*, Math. Ann. **270** (1985), 125–145

[15] R. WALTER: *Differentialgeometrie*, Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut/Wissenschaftsverlag (1989)

[16] H. WEYL: *Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement*, Vierteljahresschrift, Naturforsch. Ges. Zürich **61** (1916), 40–72

[17] H.-C. YANG UND Q.-M. CHENG: *An estimate of the pinching constant of minimal hypersurfaces with constant scalar curvature in the unit sphere*, Manuscripta Math. **82** (1994), 89–100

[18] H.-C. YANG UND Q.-M. CHENG: *On a Chern's conjecture of minimal hypersurfaces*, 1994 (meines Wissens noch nicht erschienen)

[19] S.-T. YAU: *Submanifolds with constant mean curvature I*, Amer. Journal of Math. **96** (1974), 346–366

[20] S.-T. YAU: *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. Journal of Math. **97** (1975), 76–100